

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE NANCY I

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

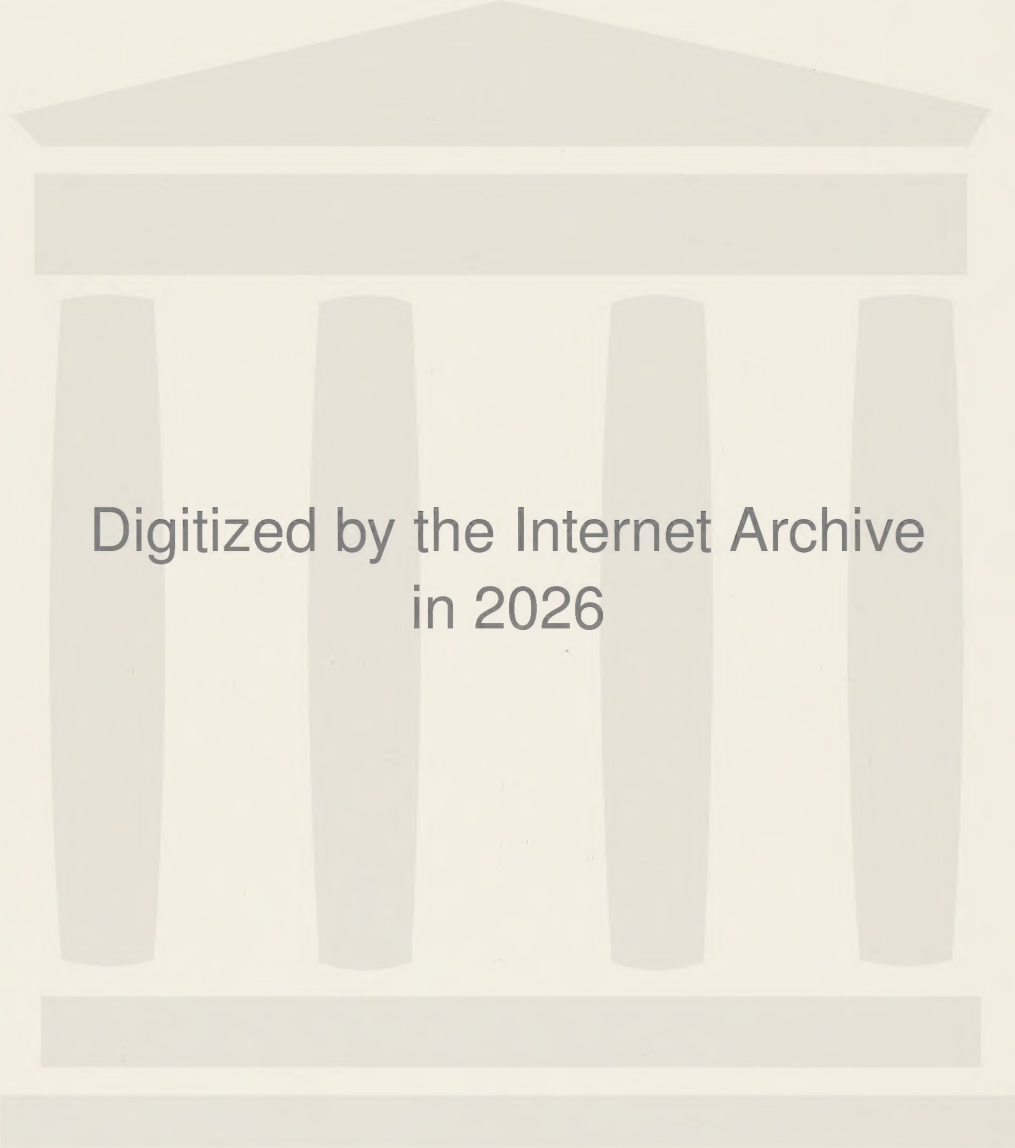
CHAU NEARKASEN

UNE TECHNIQUE NUMÉRIQUE DE RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DE CONVOLUTION APPLICATION AU TRAITEMENT DES SCINTIGRAPHIES NUMÉRIQUES

Soutenue publiquement le 21 février 1976 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury:

MM.	J. LEGRAS	:	Président
	M. DEPAIX	}	Examineurs
	J.P. HATON		
	M. LUCIUS		
	J.L. MALLET		
	J. MARTIN		



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555016_0034

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE NANCY I

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

par

CHAU NEARKASEN

UNE TECHNIQUE NUMERIQUE DE RESOLUTION D'EQUATIONS DE CONVOLUTION APPLICATION AU TRAITEMENT DES SCINTIGRAPHIES NUMERIQUES

Soutenue publiquement le 21 février 1976 devant la Commission d'Examen

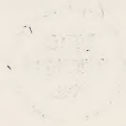
Membres du Jury:

MM.	J. LEGRAS	:	Président
	M. DEPAIX	}	Examineurs
	J.P. HATON		
	M. LUCIUS		
	J.L. MALLET		
	J. MARTIN		



AVANT-PROPOS

À ma famille



AVANT-PROPOS

Ce travail a été réalisé sous la direction de M. le Professeur J. LEGRAS à qui je dois l'essentiel de ma formation mathématique ; qu'il trouve ici, pour la bienveillance et l'aide incessante qu'il m'a toujours prodiguées, pour les conseils judicieux et les encouragements qu'il m'a donnés, l'expression de ma profonde et respectueuse gratitude.

Je remercie très vivement M. J.P. HATON et M. le Professeur M. DEPAIX qui ont bien voulu examiner mon travail et me faire l'honneur de participer au jury de cette thèse.

Que M. le Professeur M. LUCIUS et M. le Professeur J. MARTIN soient assurés de toute ma reconnaissance pour avoir accepté d'être mes rapporteurs et de me faire l'honneur d'être membres du jury.

Je n'oublie pas M. J.L. MALLET pour les conseils et la bienveillance qu'il m'a toujours témoignés et pour l'honneur qu'il me fait en participant au jury. Je le remercie de ses programmes de tracé des représentations graphiques des fonctions qui m'ont permis d'illustrer d'une façon remarquable les divers documents et résultats.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à M. B. LEGRAS qui est à l'origine de ce travail et qui m'a fait bénéficier avec bienveillance de sa large connaissance dans le domaine des scintigraphies numériques. Je n'oublierai jamais le soutien moral et l'aide constante qu'il m'a toujours apportés. Ses conseils et ses suggestions m'ont été très précieux.

Je suis très heureux de pouvoir remercier M. J. P. LAMBERT pour les programmes de représentation des données et résultats et pour les données numériques qu'il m'a transmises du centre des isotopes de Nancy. Ceux-ci m'ont beaucoup facilité dans la mise en œuvre de la technique étudiée.

Mes remerciements s'adressent également au personnel du Centre de Calcul Automatique de Nancy pour l'accueil chaleureux qu'il m'ont toujours réservé.

Enfin, je remercie vivement Mme D. MARCHAND qui a assuré avec beaucoup de soin la réalisation matérielle de ce mémoire.

TABLE DES MATIERES

Chapitre I. Résolution d'équations de convolution à seconds membres périodiques

1. Principe et exposé de la méthode	2
11 - Cas d'une variable.....	4
111 - Cas où $R(u)$ est une fonction quelconque	4
1111 - Détermination de $A_p(x)$	5
1112 - Cas où $O(x)$ est une fonction échantillonnée. Cas de solution stricte. Stabilité	8
112 - Cas particulier où $R(u)$ est paire	18
1121 - Cas où $O(x)$ est quelconque	19
1122 - Cas où $O(x)$ est paire	23
12 - Cas de deux variables	26
121 - Cas où $R(u, v)$ est quelconque	27
1211 - Détermination de $A_{pq}(x, y)$	29
1212 - Cas où $O(x, y)$ est une fonction échantillonnée. Cas de solution stricte	34
1213 - Cas où $R(u, v)$ est un produit tensoriel de deux fonctions.....	50
122 - Cas particulier où $R(u, v)$ est paire	54
2. Applications numériques	60
21 - Construction des exemples à traiter	60
22 - Résultats	66

Chapitre II. Application aux lissage et correction de résolution des scintigraphies numériques

1. <i>Adaptation de la méthode décrite au chapitre I</i>	75
11 - Principe et exposé théorique	75
12 - Applications numériques	83
121 - Exemples simulés	84
1211 - Construction des exemples simulés	85
1212 - Résultats	86
12121 - Cas d'une variable	86
12122 - Cas de deux variables	92
122 - Exemple expérimental	99
2. <i>Comparaison de la méthode proposée avec les autres méthodes</i>	106
21 - Rappel des méthodes classiques	106
211 - L'usage de la transformée de Fourier	107
212 - Résolution du système linéaire discrétisé par métho- des itératives	112
22 - Comparaison de la méthode proposée avec les méthodes clas- siques	119
221 - Comparaison avec la méthode usant de la transforma- tion de Fourier	119
222 - Comparaison avec les méthodes itératives	126
Bibliographie	132

INTRODUCTION

Nous présentons, dans cet ouvrage, une technique numérique de résolution d'équation de convolution :

$$A * R = O$$

où R et O sont des fonctions données et ses applications au traitement des scintigraphies numériques.

Nous divisons notre étude en deux chapitres. Le premier chapitre est consacré aux équations avec second membre périodique. La méthode consiste à approcher le second membre $O(x)$ par une fonction de la forme :

$$O_m(x) = c_0 + \sum_{i=1}^m (c_i \cos i\omega x + d_i \sin i\omega x)$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T étant la période de $O(x)$, et à expliciter ensuite par une formulation stricte la solution de l'équation approchée obtenue :

$$A_m * R = O_m$$

Nous étudions essentiellement le cas où $O(x)$ est une fonction "échantillonnée" définie par ses valeurs numériques sur un support régulier $x_1, x_2, \dots, x_n$ défini par :

$$x_i = \frac{i-1}{n} T \quad i = 1, 2, \dots, n$$

et nous prenons comme inconnues de notre problème les valeurs de $A_m(x_1), A_m(x_2), \dots$, et $A_m(x_n)$. Dans ce dernier cas, nous déterminons les coefficients c_i et d_i tels que $O_m(x)$ soit le polynôme généralisé d'interpolation de $O(x)$ ou sa meilleure approximation au sens des moindres carrés sur le support considéré et dans la base :

$$1, \cos \omega x, \sin \omega x, \dots, \cos m\omega x, \sin m\omega x.$$

On trouvera, dans le deuxième chapitre, l'adaptation de la méthode proposée au problème de lissage et de correction de résolution des scintigraphies numériques et l'étude comparative de la méthode adaptée avec les autres méthodes.

Les méthodes classiques de résolution d'équations de convolution peuvent être groupées en deux familles principales :

- (i) la discrétisation de l'équation de départ en un système d'équations linéaires que l'on résoudra par une des nombreuses méthodes itératives,
- (ii) et l'usage de la transformation de Fourier.

On peut noter que, pour le traitement des scintigraphies numériques, l'emploi des méthodes (i) doit être précédé par une opération de lissage et il est difficile d'étudier l'influence de ce dernier et celui du nombre d'itérations utilisé. De plus, pour cette classe de problèmes, le système linéaire approché obtenu est, en général, un système instable de sorte que sa résolution demande un nombre d'itérations trop élevé et est, par conséquent, trop coûteuse.

Les méthodes (ii) ont, comme la méthode proposée, l'avantage de pouvoir permettre d'effectuer simultanément le lissage et la correction de résolution du collimateur employé. Toutefois, elles introduisent au cours du traitement des discrétisations d'intégrales dont l'influence est encore difficile à étudier. Dans la méthode proposée, on limite le champ de calcul à des combinaisons linéaires de cosinus et sinus et le lissage utilisé est traduit par la troncature systématique de $A_m(x)$ à un ordre p ; l'expression tronquée ainsi obtenue sera la meilleure approximation au sens des moindres carrés de $A_m(x)$ sur le support $x_1, x_2, \dots, x_n$ parmi les polynômes trigonométriques de degré p de la forme

$$a_0 + \sum_{i=1}^p (a_i \cos i\omega x + b_i \sin i\omega x)$$

D'autre part, pour pouvoir utiliser des algorithmes de transformation de Fourier rapide, les méthodes (ii) introduisent, de plus,

la contrainte que n soit décomposable en facteurs premiers qui est une condition assez restrictive.

La méthode proposée n'introduit aucune contrainte sur n . C'est de plus une méthode de programmation simple, peu encombrante en espace mémoire centrale, rapide et qui conduit à des résultats très satisfaisants.

On peut noter que dans un problème à deux variables où R est une fonction paire par rapport à chacune de ses variables et égale au produit tensoriel de deux fonctions (cas le plus favorable pour notre méthode et qui est rencontré généralement dans le traitement des scintigraphies numériques) le temps de calcul pour notre méthode est, sur une matrice carrée de dimension 64, de 0,20 mn soit environ douze fois plus court que celui demandé par la méthode usant de la transformation de Fourier (nous sommes aussi placés dans le cas le plus favorable pour cette dernière méthode car 64 est une puissance de deux ; l'algorithme de transformation de Fourier rapide utilisé est dû à Glasman, il ne demande pas l'arrangement des valeurs avant et le réarrangement après le calcul de chaque transformée).

Signalons, enfin, que nous n'exposons dans cet ouvrage que le cas d'une et de deux variables mais la méthode, qui sera décrite, se généralise sans difficulté au cas de trois variables ou plus.

Chapitre I

RESOLUTION D'EQUATIONS DE CONVOLUTION A SECONDS MEMBRES PERIODIQUES

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions définies sur la droite réelle $\mathbb{R}$, périodiques de période T et $R(u)$ une fonction quelconque définie sur $\mathbb{R}$.

Nous définissons sur $\mathcal{P}$ un opérateur L par :

$$L(A) = A * R$$

où $*$ est le symbole du produit de convolution de deux fonctions (réf. 43), relation qui s'écrit encore :

$$L(A)(x) = \int_{\mathbb{R}} A(u)R(x-u) du$$

Il est alors évident que cet opérateur L est linéaire et que l'image $L(A)$ de tout élément $A \in \mathcal{P}$ est aussi un élément de $\mathcal{P}$.

Le problème posé est le suivant : étant donnée une fonction $O \in \mathcal{P}$, déterminer une fonction $A \in \mathcal{P}$ (si elle existe) telle que :

$$L(A) = O \tag{1}$$

La méthode que nous proposons consiste à développer les fonctions $A(x)$ et $O(x)$ en séries trigonométriques. Elle conduit à une technique de calcul particulièrement rapide mobilisant très peu d'espace mémoire centrale. De plus, les résultats obtenus présentent une grande stabilité.

Dans cette étude, nous développons principalement le cas où $O(x)$ est une fonction "échantillonnée", c'est-à-dire définie par une table de valeurs numériques.

Nous étudierons également le cas où $R(u)$ est une fonction paire. Cette dernière hypothèse, qui sera vérifiée lorsque $R(u)$ est une fonction gaussienne centrée (à l'origine des axes) ⁽¹⁾, allège considérablement les calculs.

Le paragraphe 1 présente le principe et l'exposé théorique de la méthode proposée dans le cas d'une et de deux variables. Le paragraphe 2 est consacré à ses applications numériques.

1. Principe et exposé de la méthode

Nous verrons au paragraphe 1111 que l'opérateur L est tel que

$$\begin{cases} L(\cos j\omega \cdot)(x) = \rho_j \cos j\omega x + \mu_j \sin j\omega x \\ L(\sin j\omega \cdot)(x) = -\mu_j \cos j\omega x + \rho_j \sin j\omega x \end{cases} \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (2)$$

et la nature périodique des fonctions $A(x)$ et $O(x)$ nous conduit à nous intéresser à une classe de fonctions qui sont combinaisons linéaires des cosinus et sinus, c'est-à-dire aux fonctions sommes de séries trigonométriques ⁽³⁾.

De plus, dans les problèmes que nous traitons, nous limitons les données $O(x)$ à des fonctions échantillonnées, c'est-à-dire qui ne sont définies que par leurs valeurs numériques $O(x_j)$ sur un support fini de $2m+1$ points x_j . Pour introduire ces fonctions dans des traitements mathématiques, il faudra faire une hypothèse sur leur comportement en dehors

⁽¹⁾ C'est le cas des problèmes que nous traiterons au chapitre II.

⁽²⁾ $\mathbb{N}$ représente l'ensemble des entiers naturels.

⁽³⁾ C'est seulement lorsque les fonctions $A(x)$ et $O(x)$ ne sont pas périodiques qu'il est utile d'introduire les transformées de Fourier.

des points du support. Compte tenu des remarques précédentes, il est naturel de faire l'hypothèse que toute fonction $O(x)$ sera

$$c_0 + \sum_{j=1}^m (c_j \cos j\omega x + d_j \sin j\omega x)$$

somme partielle d'une série trigonométrique limitée à ses $2m+1$ premiers termes et déterminée par le fait que cette somme est égale aux valeurs données $O(x_j)$ aux $2m+1$ points du support (polynôme généralisé d'interpolation).

Il est naturel également de nous intéresser aux valeurs numériques de la solution $A(x)$, et nous prendrons comme inconnues les valeurs échantillonnées $A(x_j)$ aux points du support.

Nous verrons que les hypothèses faites et les limitations introduites sur les fonctions $O(x)$ nous permettent d'approcher l'équation intégrale (1) par un système linéaire :

$$\Lambda \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{0}$ sont des matrices colonnes ayant respectivement pour éléments $A(x_1), A(x_2), \dots, A(x_{2m+1})$ et $O(x_1), O(x_2), \dots, O(x_{2m+1})$.

Le calcul des éléments de Λ sera formalisé au paragraphe 21 et la méthode que nous exposons revient à expliciter le calcul des éléments de $\mathbf{V}_m = \Lambda^{-1}$ par une formalisation stricte bien adaptée au traitement numérique.

Remarquons encore que d'autres approches de (1) peuvent être faites par diverses techniques d'approximation des intégrales [qui reviennent à introduire d'autres hypothèses sur le comportement de $A(x)$] mais, dans ce cas, on ne sait plus obtenir un calcul explicite des éléments de la matrice inverse et, pour résoudre le système linéaire approchant obtenu, il faut recourir à des méthodes itératives (cf. paragraphe du chapitre II).

Dans le prochain paragraphe, nous exposerons la méthode

proposée dans le cas d'une variable, l'extension au cas de deux variables se fait sans difficulté et sera l'objet du paragraphe 12.

11 - CAS D'UNE VARIABLE.

111 - CAS OÙ $R(u)$ EST UNE FONCTION QUELCONQUE.

Recherchons une solution de ⁽¹⁾ sous forme d'une somme de série de cosinus et sinus :

$$A(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos i\omega x + b_i \sin i\omega x) \quad (2)$$

où ω est la "pulsation associée à la période T" :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (3)$$

Développons, pour cela, $O(x)$ en série de cosinus et sinus. Nous obtenons alors (réf. 18, 43) :

$$O(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (c_i \cos i\omega x + d_i \sin i\omega x) \quad (4)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T O(x) dx \\ c_i = \frac{2}{T} \int_0^T O(x) \cos i\omega x dx \\ d_i = \frac{2}{T} \int_0^T O(x) \sin i\omega x dx \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall i \in \mathbb{N}^* \end{array} \quad (5)$$

En calcul numérique où le volume de calcul est limité, nous ne pouvons travailler que sur des sommes finies. Nous devons donc limiter

⁽¹⁾ $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$

les sommes $A(x)$ et $O(x)$ à un certain ordre p , ce qui conduit à :

$$A(x) \sim A_p(x) = a_0 + \sum_{i=1}^p (a_i \cos i\omega x + b_i \sin i\omega x) \quad (6)$$

$$O(x) \sim O_p(x) = c_0 + \sum_{i=1}^p (c_i \cos i\omega x + d_i \sin i\omega x) \quad (7)$$

La recherche d'une solution approchée de l'équation (1) revient donc à la détermination de $A_p(x)$ solution de l'équation approchée :

$$L(A_p)(x) = O_p(x)$$

1111 - DETERMINATION DE $A_p(x)$

Introduisons les coefficients :

$$\begin{cases} \rho_j &= \int_{\mathbb{R}} R(u) \cos j\omega u \, du & j \in \mathbb{N} \\ \mu_j &= \int_{\mathbb{R}} R(u) \sin j\omega u \, du & j \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (8)$$

Ces coefficients peuvent se calculer à partir de la transformée de Fourier de $R(u)$ (réf. 43) :

$$\text{TF}(R)(v) = \int_{\mathbb{R}} R(u) e^{-2\pi i v u} \, du$$

par

$$\begin{cases} \rho_j &= \frac{1}{2} [\text{TF}(R)(\frac{j}{T}) + \text{TF}(R)(\frac{-j}{T})] \\ \mu_j &= \frac{i}{2} [\text{TF}(R)(\frac{j}{T}) - \text{TF}(R)(\frac{-j}{T})] \end{cases} \quad (9)$$

En effet, ces deux dernières relations sont des conséquences évidentes des formules classiques :

$$\begin{cases} \cos x &= (e^{ix} + e^{-ix})/2 \\ \sin x &= (e^{ix} - e^{-ix})/2i \end{cases}$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 1. Les coefficients $\{a_j, b_j\}$ et $\{c_j, d_j\}$ des polynômes trigonométriques $A_p(x)$ et $O_p(x)$ sont liés par les relations :

$$\begin{cases} c_0 &= \rho_0 a_0 \\ c_j &= \rho_j a_j - \mu_j b_j \\ d_j &= \mu_j a_j + \rho_j b_j \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (10)$$

Démonstration.

On a les identités suivantes :

$$\begin{cases} L(\cos j\omega)(x) &= \rho_j \cos j\omega x + \mu_j \sin j\omega x \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} L(\sin j\omega)(x) &= -\mu_j \cos j\omega x + \rho_j \sin j\omega x \end{cases} \quad (12)$$

Nous ne démontrons que la formule (11) car la formule (12) peut se démontrer, en fait, de la même façon.

En effet, on a :

$$L(\cos j\omega)(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos j\omega u \cdot R(x-u) du$$

Faisons le changement de variable $v = x-u$, nous obtenons alors :

$$L(\cos j\omega)(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos j\omega(x-v) R(v) dv$$

Mais

$$\cos j\omega(x-v) = \cos j\omega x \cos j\omega v + \sin j\omega x \sin j\omega v$$

nous avons donc :

$$\begin{aligned} L(\cos j\omega)(x) &= \int_{\mathbb{R}} (\cos j\omega x \cos j\omega v + \sin j\omega x \sin j\omega v) R(v) dv \\ &= \rho_j \cos j\omega x + \mu_j \sin j\omega x \end{aligned}$$

D'autre part, on a par définition :

$$\begin{aligned} O_p(x) &= L(A_p)(x) \\ &= L \left[a_o + \sum_{j=1}^p (a_j \cos j\omega. + b_j \sin j\omega.) \right] (x) \end{aligned}$$

Comme p est fini et puisque l'opérateur L est linéaire, on a donc

$$O_p(x) = L(a_o)(x) + \sum_{j=1}^p [a_j L(\cos j\omega.)(x) + b_j L(\sin j\omega.)(x)]$$

d'où en remplaçant $L(\cos j\omega.)(x)$ et $L(\sin j\omega.)(x)$ par leurs valeurs respectives données par (11) et (12) :

$$O_p(x) = a_o \rho_o + \sum_{j=1}^p [(\rho_j a_j - \mu_j b_j) \cos j\omega x + (\mu_j a_j + \rho_j b_j) \sin j\omega x]$$

Ce qui achève la démonstration.

Ce théorème nous conduit à introduire, dans la suite, l'hypothèse complémentaire suivante :

$$\begin{cases} \rho_o & \neq 0 \\ \rho_j^2 + \mu_j^2 & \neq 0 \end{cases} \quad 1 \leq j \leq p \quad (13)$$

Nous déduisons alors immédiatement du théorème 1 :

$$A_p(x) = \frac{c_o}{\rho_o} + \sum_{j=1}^p \frac{1}{\rho_j^2 + \mu_j^2} [(\rho_j c_j + \mu_j d_j) \cos j\omega x + (-\mu_j c_j + \rho_j d_j) \sin j\omega x] \quad (14)$$

Note.

L'extension du théorème 1 au cas où p devient infini n'est possible que sous des conditions supplémentaires autorisant la permutation des signes Σ et $\int$ (introduite par l'opérateur L).

Alors, sous l'un des deux groupes de conditions suivantes :

(i) le support ⁽¹⁾ de $R(u)$ est un intervalle fini et la série $A_{\infty}(x)$
⁽²⁾ est uniformément convergente pour tout x ,

(ii) la série $A_{\infty}(x)$ est simplement convergente et pour tout x :

$$\int_{\mathbb{R}} \left\{ \left| \frac{c}{\rho_0} R(x-u) \right| + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_j^2 + \mu_j^2} \left[\left| (\rho_j c_j + \mu_j d_j) \cos j\omega u \cdot R(x-u) \right| \right. \right. \\ \left. \left. + \left| (-\mu_j c_j + \rho_j d_j) \sin j\omega u \cdot R(x-u) \right| \right] \right\} du < +\infty$$

(cette dernière condition implique nécessairement que la série
 $O_{\infty}(x)$ est absolument convergente),

on démontre aisément, à l'aide de quelques résultats classiques (réf. 43)
 que le théorème 1 reste encore valable pour $p = +\infty$.

1112 - CAS OÙ $O(x)$ EST UNE FONCTION ECHANTILLONNEE - CAS DE SOLUTION STRICTE - STABILITE.

Dans cette étude, nous nous limitons au cas où $O(x)$ est une fonction "échantillonnée" définie par ses valeurs numériques sur un support régulier $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, T]$, défini par :

$$x_i = \frac{i-1}{n} T \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

Il est naturel, dans ce cas, de déterminer les coefficients c_j et d_j pour que le polynôme approchant $O_p(x)$ "interpole" $O(x)$ sur le support considéré, c'est-à-dire tels que :

$$O_p(x_i) = O(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

relation qui forme un système linéaire de n équations à $2p+1$ inconnues.

⁽¹⁾ le support d'une fonction est le plus petit ensemble fermé, dans le complémentaire duquel, elle est nulle.

⁽²⁾ $A_{\infty}(x)$ est la limite de $A_p(x)$ quand p tend vers l'infini.

Théorème 2. (Réf. 30) - Si n est impair et égal à $2p+1$, alors ce système (qui devient alors un système de Cramer) admet toujours une solution unique ⁽¹⁾

$$\begin{cases} c_0 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n O(x_i) \\ c_j &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n O(x_i) \cos j\omega x_i \quad j = 1, 2, \dots, p \\ d_j &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n O(x_i) \sin j\omega x_i \quad j = 1, 2, \dots, p \end{cases} \quad (16)$$

Désignons par $\mathcal{C}_p$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}$ formé de polynômes trigonométriques de la forme :

$$\ell_0 + \sum_{i=1}^p (\ell_i \cos i\omega x + k_i \sin i\omega x) \quad \ell_i, k_i \in \mathbb{R}.$$

Le théorème 2 nous montre que, si n est impair, alors pour toute fonction échantillonnée définie sur le support considéré, il existe toujours un polynôme unique appartenant à $\mathcal{C}_{\frac{n-1}{2}}$ qui l'interpole.

CAS DE SOLUTION STRICTE.

Le théorème 2 nous conduit à nous limiter, dans le présent paragraphe, au cas où n est impair et à supposer en outre que $O(x)$ appartient à $\mathcal{C}_m$ où

$$m = \frac{n-1}{2}$$

Une conséquence immédiate du théorème 1 est alors la suivante :

⁽¹⁾ Cette solution peut s'obtenir en approchant les intégrales (5) par la méthode de trapèze généralisée (réf. 30).

Théorème 3. Si

$$O(x) = c_o + \sum_{i=1}^m (c_i \cos i\omega x + d_i \sin i\omega x) \quad (17)$$

alors l'équation (1) admet une solution (stricte) et une seule :

$$A(x) = \frac{c_o}{\rho_o} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{\rho_i^2 + \mu_i^2} [(\rho_i c_i + \mu_i d_i) \cos i\omega x + (-\mu_i c_i + \rho_i d_i) \sin i\omega x] \quad (18)$$

D'autre part, il est naturel et commode d'introduire les valeurs de $A(x)$ sur le support indiqué.

Alors :

Théorème 4. On a :

$$\begin{bmatrix} A(x_1) \\ A(x_2) \\ \vdots \\ A(x_n) \end{bmatrix} = [\Phi_m] \cdot \begin{bmatrix} O(x_1) \\ O(x_2) \\ \vdots \\ O(x_n) \end{bmatrix} \quad (19)$$

où Φ_m est une matrice carrée d'ordre n dont l'élément φ_{ij}^m situé au croisement de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est défini par :

$$\varphi_{ij}^m = X_m(j-i) + Y_m(j-i) \quad (20)$$

dans laquelle, $X_m(t)$ et $Y_m(t)$ sont respectivement des fonctions paire et impaire définies par :

$$\begin{cases} X_m(t) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\rho_o} + 2 \sum_{k=1}^m \frac{\rho_k}{\rho_k^2 + \mu_k^2} \cos \frac{2\pi kt}{n} \right) \\ Y_m(t) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^m \frac{\mu_k}{\rho_k^2 + \mu_k^2} \sin \frac{2\pi kt}{n} \end{cases}$$

$$A(x) = \frac{c_0}{\rho_0} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{\rho_k^2 + \mu_k^2} [(\rho_k c_k + \mu_k d_k) \cos k\omega x + (-\mu_k c_k + \rho_k d_k) \sin k\omega x]$$

Remplaçons, dans cette expression, les coefficients c_k et d_k par leurs valeurs respectives données par les relations (16) et attribuons à x une valeur quelconque x_i du support. Nous obtenons alors, par un calcul élémentaire :

$$A(x_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot O(x_j) \quad (21)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} = \frac{1}{n} [& \frac{1}{\rho_0} + 2 \sum_{k=1}^m \frac{1}{\rho_k^2 + \mu_k^2} (\rho_k \cos k\omega x_j \cdot \cos k\omega x_i \\ & + \mu_k \sin k\omega x_j \cdot \cos k\omega x_i - \mu_k \cos k\omega x_j \sin k\omega x_i \\ & + \rho_k \sin k\omega x_j \sin k\omega x_i)] \end{aligned}$$

Comme la relation (21) est valable pour tout k , il ne nous reste donc qu'à prouver que :

$$\alpha_{ij} = \varphi_{ij}^m \quad 1 \leq i, j \leq n$$

En effet, appliquons à la relation (22), les formules trigonométriques :

$$\begin{cases} \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \end{cases}$$

nous obtenons alors après simplification :

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{1}{n} [\frac{1}{\rho_0} + 2 \sum_{k=1}^m \frac{\rho_k}{\rho_k^2 + \mu_k^2} \cos k\omega(x_j - x_i) \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^m \frac{\mu_k}{\rho_k^2 + \mu_k^2} \sin k\omega(x_j - x_i)] \\ &= X_m(j-i) + Y_m(j-i) \\ &= \varphi_{ij}^m \end{aligned}$$

(C. Q. F. D.)

On notera que, dans le théorème 4, les fonctions $X_m(t)$ et $Y_m(t)$ sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus, la matrice Φ_m a une forme particulière très simple. Si on pose :

$$\begin{cases} \beta_0 &= X_m(0) \\ \beta_i &= X_m(i) + Y_m(i) & i = 1, 2, \dots, m \\ \gamma_i &= X_m(i) - Y_m(i) & i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (23)$$

alors des relations triviales :

$$\begin{cases} X_m(i) &= X_m(n-i) \\ Y_m(i) &= -Y_m(n-i) \end{cases} \quad i = m+1, m+2, \dots, n-1$$

on montre aisément que :

$$\Phi_m = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m & \gamma_m & \gamma_2 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m & \gamma_m & \gamma_2 \\ \gamma_2 & & & & & & & \\ & & & & & & & \gamma_m \\ \gamma_m & & & & & & & \beta_m \\ \beta_m & & & & & & & \\ & & & & & & & \beta_2 \\ \beta_2 & & \beta_m & \gamma_m & & & \beta_0 & \beta_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & & \beta_m & \gamma_m & \gamma_2 & \gamma_1 & \beta_0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

C'est donc une matrice dont tous les éléments situés sur deux diagonales parallèles à la diagonale principale et séparées par $n-1$ ($n-1 = 2m$) diagonales parallèles également à la diagonale principale sont égaux. Φ_m est, par conséquent, déterminée par la connaissance des n valeurs $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_m$.

Il résulte, d'autre part, du théorème 4 que les valeurs $A(x_i)$ sont des combinaisons linéaires pondérées des valeurs $O(x_j)$, la matrice des coefficients de pondération Φ_m étant indépendante de $O(x_j)$, elle ne dépend que de n et de $R(u)$.

Dans la pratique, pour calculer les valeurs $A(x_i)$, il est inutile de calculer, d'une façon effective, la matrice Φ_m , qui est en général de très grandes dimensions, car il suffit simplement de calculer les n valeurs $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_m$ et d'utiliser ensuite la formule directe :

$$A(x_i) = \sum_{j=1}^n h_{n-i+j} \cdot O(x_j) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

où $h_1, h_2, \dots, h_{2n-1}$ sont les éléments de la matrice

$$H = [\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m \gamma_m \dots \gamma_2 \gamma_1 \beta_0 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m \gamma_m \dots \gamma_2 \gamma_1]$$

La méthode proposée conduit donc à un algorithme de calcul des valeurs $A(x_i)$ particulièrement simple et demandant très peu d'espace mémoire centrale.

STABILITE.

En général, les coefficients c_i, d_i, ρ_i et μ_i tendent rapidement vers zéro quand i tend vers $+\infty$. De plus, les coefficients c_i et d_i calculés à partir des relations (16) seront entachés de certaines erreurs d'arrondi ε_i et ε'_i qui peuvent devenir plus grandes en valeur absolue que les valeurs strictes c_i^* et d_i^* de c_i et d_i lorsque ceux-ci sont voisins de zéro. Les coefficients a_i et b_i correspondants seront donc égaux à :

$$a_i = \frac{\rho_i c_i^* + \mu_i d_i^*}{\rho_i^2 + \mu_i^2} + \frac{\rho_i \varepsilon_i + \mu_i \varepsilon'_i}{\rho_i^2 + \mu_i^2} \quad (1)$$

(1) Dans ces relations, nous négligeons les erreurs de chute inhérentes aux valeurs calculées des coefficients ρ_i et μ_i .

$$b_i = \frac{-\mu_i c_i^* + \rho_i d_i^*}{\rho_i^2 + \mu_i^2} + \frac{-\mu_i \varepsilon_i + \rho_i \varepsilon_i'}{\rho_i^2 + \mu_i^2}$$

sommes où apparaissent les termes parasites

$$\frac{\rho_i \varepsilon_i + \mu_i \varepsilon_i'}{\rho_i^2 + \mu_i^2}, \quad \frac{-\mu_i \varepsilon_i + \rho_i \varepsilon_i'}{\rho_i^2 + \mu_i^2} \quad (25)$$

d'autant plus amplifiés que ρ_i et μ_i seront plus petits.

Notons que, si le calculateur utilisé dispose d'un nombre suffisant de chiffres significatifs, alors les quantités ε_i et ε_i' et, par conséquent, les facteurs parasites (25) pourront être rendus aussi petits qu'on le désire, ce qui permettra d'obtenir les valeurs $A(x_i)$ avec n'importe quelle précision désirée (cf. tableau 1, page 67).

Cependant, dans le cas où le nombre de chiffres significatifs ainsi considéré est assez limité et surtout lorsque les valeurs $O(x_j)$ sont entachées d'une certaine erreur de mesure dont l'influence est beaucoup plus importante que celles des erreurs de troncature, ces facteurs pourront devenir, au contraire, très importants.

Dans ce dernier cas, il serait souhaitable de retrancher, de l'expression de $A(x)$, les termes correspondants. Mais ceux-ci sont, dans la pratique, inconnus et nous serons obligés à tronquer ⁽¹⁾ la somme à un ordre $p \leq m$. Nous reviendrons sur l'influence de cette troncature au paragraphe 22 et nous allons maintenant établir quelques propriétés et résultats sur les polynômes tronqués $A_p(x)$.

(1) - Dans les problèmes de correction de résolution des scintigraphies numériques où les valeurs $A(x_i)$ sont les réalisations d'une suite de n variables aléatoires gaussiennes, le but essentiel du traitement est de déterminer leurs valeurs moyennes. Ceci nous amène également à effectuer une troncature systématique de $A(x)$.

Théorème 5. (Réf. 30) Soient $Q \in \mathcal{C}_m$ et Ω une fonction réelle positive définie sur $\mathcal{C}_p$ par :

$$\Omega(P) = \sum_{i=1}^n [P(x_i) - Q(x_i)]^2$$

Si $Q_p(x)$ est le polynôme $Q(x)$ tronqué à l'ordre p , alors on a :

$$\Omega(Q_p) = \min_{P \in \mathcal{C}_p} \Omega(P)$$

On dit alors que, parmi les polynômes appartenant à $\mathcal{C}_p$, $Q_p(x)$ est la meilleure approximation au sens des moindres carrés de $Q(x)$ sur le support $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Il en résulte donc que si $O_p(x)$ est le polynôme $O(x)$ tronqué à l'ordre p , alors dans $\mathcal{C}_p$, $O_p(x)$ est la meilleure approximation au sens des moindres carrés de $O(x)$ et il en sera de même pour $A_p(x)$ et $A(x)$.

On démontre alors, d'une façon analogue à celle du théorème 4 :

Théorème 6. On a :

$$\begin{bmatrix} A_p(x_1) \\ A_p(x_2) \\ \vdots \\ A_p(x_n) \end{bmatrix} = [\Phi_p] \cdot \begin{bmatrix} O(x_1) \\ O(x_2) \\ \vdots \\ O(x_n) \end{bmatrix} \quad (26)$$

où Φ_p est une matrice carrée d'ordre n dont l'élément ϕ_{ij}^p situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est défini par :

$$\varphi_{ij}^p = X_p(j-i) + Y_p(j-i)$$

dans laquelle, $X_p(t)$ et $Y_p(t)$ sont des fonctions respectivement paire et impaire définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_p(t) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\rho_0} + 2 \sum_{k=1}^p \frac{\rho_k}{\rho_k^2 + \mu_k^2} \cos \frac{2\pi k t}{n} \right) \\ Y_p(t) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^p \frac{\mu_k}{\rho_k^2 + \mu_k^2} \sin \frac{2\pi k t}{n} \end{array} \right.$$

On remarque donc que le théorème 4 apparaît comme un cas particulier de ce dernier théorème où $p = m$.

Dans ce paragraphe, nous avons toujours limité notre étude, par suite du théorème 2, au cas où n est impair et où $O(x)$ appartient à $\mathcal{C}_m$. Nous allons maintenant étudier le cas où n est pair et où $O(x)$ est une fonction échantillonnée quelconque n'appartenant pas nécessairement à un ensemble $\mathcal{C}_p$ tel que $2p+1 \leq n$.

Supposons donc que n est pair et posons :

$$r = n/2$$

En se basant sur les formules classiques ⁽¹⁾ :

(¹) Ces formules traduisent l'orthogonalité des fonctions $1, \cos \omega x, \sin \omega x, \dots, \cos(r-1)\omega x, \sin(r-1)\omega x$ appartenant à $\mathcal{P}$ muni du produit scalaire, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, défini par (réf. 30) :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot g(x_i)$$

Elles sont démontrées, dans la référence indiquée, dans le cas où n est impair et elles restent valables lorsque n devient pair.

$$\sum_{i=1}^n \cos j\omega x_i - \cos k\omega x_i = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ n/2 & \text{si } j = k \neq 0 \\ n & \text{si } j = k = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^n \sin j\omega x_i \cdot \sin k\omega x_i = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ n/2 & \text{si } j = k \neq 0 \\ 0 & \text{si } j = k = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^n \cos j\omega x_i \cdot \sin k\omega x_i = 0 \quad \forall j, k$$

variables pour tous entiers j et k tels que $0 \leq j, k < r$, on démontre d'une façon tout à fait semblable à celle du théorème 5 (réf. 30) que :

$$O_p(x) = c_0 + \sum_{j=1}^p (c_j \cos j\omega x + d_j \sin j\omega x)$$

où les coefficients c_j et d_j sont ceux définis par les relations (16), est dans $\mathcal{C}_p$, la meilleure approximation au sens des moindres carrés de $O(x)$ sous la condition toutefois que $p < r$ (c'est-à-dire que le nombre de termes $2p+1$ de $O_p(x)$ soit inférieur au nombre de points n du support).

Ceci implique donc que $A_p(x)$ a la même expression que celle obtenue dans le cas où n est impair et, par conséquent, le théorème 6 reste encore valable.

On peut noter, cependant, que si $O(x) \in \mathcal{C}_{r-1}$, alors on a à fortiori $O_{r-1}(x)^{(1)} \equiv O(x)$, ce qui entraîne évidemment que $A_{r-1}(x) \equiv A(x)$ et que $A_p(x)$ est la meilleure approximation au sens des moindres carrés de $A(x)$ dans $\mathcal{C}_p$.

Par contre, dans le cas où $O(x)$ est une fonction quelconque n'appartenant pas à $\mathcal{C}_{r-1}$, $A_p(x)$ n'est pas en général la meilleure approximation de $A(x)$ dans $\mathcal{C}_p$, mais une fonction qui lui est voisine.

(1) $O_{r-1}(x)$ est le polynôme d'approximation de $O(x)$ correspondant à la valeur maximale admise du degré p . Il contient $2r-1 (= n-1)$ termes et n'est pas en général un polynôme d'interpolation de $O(x)$ sur le support considéré.

Posons :

$$\begin{cases} \beta_0 &= X_p(0) \\ \beta_i &= X_p(i) + Y_p(i) & i = 1, 2, \dots, r \\ \gamma_i &= X_p(i) - Y_p(i) & i = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

On montrera aisément que :

$$H_p = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{r-1} & \beta_r & \gamma_{r-1} & \gamma_r & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{r-1} & \beta_r & \gamma_{r-1} & \gamma_r \\ \gamma_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{r-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \beta_r \\ \gamma_r & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \beta_{r-1} \\ \beta_{r-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_2 & \dots & \beta_{r-1} & \gamma_r & \gamma_{r-1} & \dots & \dots & \beta_0 & \beta_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{r-1} & \gamma_r & \gamma_{r-1} & \gamma_2 & \gamma_1 & \beta_0 \end{bmatrix}$$

et la formule de calcul direct des valeurs $A_p(x_i)$ s'écrit :

$$A_p(x_i) = \sum_{j=1}^n h_{n-i+j} \cdot O(x_j) \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

où $h_1, h_2, \dots, h_{2n-1}$ sont les éléments de la matrice :

$$H = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_{r-1} \ \gamma_r \ \dots \ \gamma_2 \ \gamma_1 \ \beta_0 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_r \ \gamma_{r-1} \ \dots \ \gamma_2 \ \gamma_1]$$

112 - CAS PARTICULIER OU $R(u)$ EST PAIRE

Il est clair que la parité de $R(u)$ implique celle de sa transformée de Fourier $TF(R)(v)$. Les relations (9) deviennent alors :

$$\begin{cases} \rho_j &= \text{TF}(R)\left(\frac{j}{T}\right) & \forall j \in \mathbb{N} \\ \mu_j &= 0 & \forall j \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (27)$$

De plus, on déduit des identités (11) et (12) :

$$\begin{cases} L(\cos j\omega_0)(x) &= \rho_j \cos j\omega x \\ L(\sin j\omega_0)(x) &= \rho_j \sin j\omega x \end{cases} \quad (28)$$

Distinguons maintenant les deux cas suivants :

- cas où $O(x)$ est quelconque
- et cas où $O(x)$ est paire (ou impaire).

1121 - CAS OU $O(x)$ EST QUELCONQUE

Le théorème 1 devient, en vertu des relations (27) :

Théorème 7. Les coefficients $\{a_j, b_j\}$ et $\{c_j, d_j\}$ des fonctions $A_p(x)$ et $O_p(x)$ sont liés par :

$$\begin{cases} c_j &= \rho_j d_j & 0 \leq j \leq p \\ d_j &= \rho_j b_j & 1 \leq j \leq p \end{cases} \quad (29)$$

L'hypothèse complémentaire (13) et l'expression (14) se simplifient et s'écrivent :

$$\rho_j \neq 0 \quad 0 \leq j \leq p \quad (30)$$

$$A_p(x) = \frac{c_0}{\rho_0} + \sum_{j=1}^p \frac{1}{\rho_j} (c_j \cos j\omega x + d_j \sin j\omega x) \quad (31)$$

Ces simplifications importantes apparaissent également dans les théorèmes 3 et 6. On obtient alors :

Théorème 8. Si

$$O(x) = c_o + \sum_{i=1}^m (c_i \cos i\omega x + d_i \sin i\omega x)$$

alors l'équation (1) admet une solution (stricte) unique :

$$A(x) = \frac{c_o}{\rho_o} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{\rho_i} (c_i \cos i\omega x + d_i \sin i\omega x)$$

Théorème 9. On a pour tout p tel que $2p+1 \leq n$:

$$\begin{bmatrix} A_p(x_1) \\ A_p(x_2) \\ \vdots \\ A_p(x_n) \end{bmatrix} = [\Psi_p] \cdot \begin{bmatrix} O(x_1) \\ O(x_2) \\ \vdots \\ O(x_n) \end{bmatrix} \quad (32)$$

où Ψ_p est une matrice carrée symétrique d'ordre n dont l'élément Ψ_{ij}^p placé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne est défini par :

$$\Psi_{ij}^p = X_p(j-i) \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$X_p(t)$ étant une fonction paire, auxiliaire définie par :

$$X_p(t) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\rho_o} + \sum_{k=1}^p \frac{1}{\rho_k} \cos \frac{2\pi kt}{n} \right) \quad (33)$$

Signalons que, comme le théorème 6, le théorème 9 reste encore valable pour n pair (donc pour tout n) sous la seule condition que $2p+1 \leq n$. Mais, pour calculer les valeurs $A(x_i)$, il faudra prendre nécessairement n impair et égal au nombre de coefficients c_j et d_j de $A(x)$.

Soit r la partie entière de $n/2$. Posons :

$$\alpha_i = X_p(i) \quad i = 0, 1, \dots, r$$

Dans le cas où n est impair ($n = 2r+1$), on vérifie aisément que la matrice Ψ_p est entièrement déterminée par les $r+1$ valeurs $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ et qu'elle a, en outre, la configuration suivante :

$$\Psi_p = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_r & \alpha_r & \alpha_{r-1} & \alpha_{r-2} & \alpha_{r-1} & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_r & \alpha_r & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_r & \alpha_r & \dots & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_r & \alpha_r & \alpha_r & \dots & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_r & \alpha_1 \\ \alpha_r & \alpha_r & \alpha_r & \dots & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_r & \alpha_r & \dots & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_r & \alpha_r & \alpha_1 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est, en général, de très grandes dimensions et il est inutile, dans la pratique, pour calculer les valeurs $A_p(x_i)$, de la calculer de façon effective. En effet, il suffit simplement de calculer les $r+1$ valeurs $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ et d'employer les formules directes obtenues après groupement deux à deux des termes en $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$:

- si $1 \leq j \leq r+1$:

$$A_p(x_j) = \alpha_0 O(x_j) + \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i [O(x_{j+i}) + O(x_{j-i})] \quad (34)$$

$$+ \sum_{i=j}^r \alpha_i [O(x_{j+i}) + O(x_{n+j-i})]$$

- si $r+2 \leq j \leq n$:

$$A_p(x_j) = \alpha_0 O(x_j) + \sum_{i=1}^{n-j} \alpha_i [O(x_{j+i}) + O(x_{j-i})] \quad (35)$$

$$+ \sum_{i=n-j+1}^n \alpha_i [O(x_{j+i-n}) + O(x_{j-i})]$$

Dans le cas où n est pair ($n = 2r$), on aura :

$$\bar{\Psi}_p = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{r-1} & \alpha_r & \alpha_{r-1} & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{r-1} & \alpha_r & \alpha_{r-1} & \dots & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{r-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{r-1} \\ \alpha_r & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_r \\ \alpha_{r-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_2 & \dots & \alpha_{r-1} & \alpha_r & \alpha_{r-1} & \dots & \dots & \dots & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{r-1} & \alpha_r & \alpha_{r-1} & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

et les formules de calcul direct seront :

- si $1 \leq j \leq r$:

$$\begin{aligned} A_p(x_j) &= \alpha_0 O(x_j) + \alpha_r O(x_{r+j}) + \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i [O(x_{j+i}) + O(x_{j-i})] \\ &+ \sum_{i=j}^{r-1} \alpha_i [O(x_{j+i}) + O(x_{n+j-i})] \end{aligned} \quad (36)$$

- si $r+1 \leq j \leq n$:

$$\begin{aligned} A_p(x_j) &= \alpha_0 O(x_j) + \alpha_r O(x_{j-r}) + \sum_{i=1}^{n-j} \alpha_i [O(x_{j+i}) + O(x_{j-i})] \\ &+ \sum_{i=n-j+1}^{r-1} \alpha_i [O(x_{j+i-n}) + O(x_{j-i})] \end{aligned} \quad (37)$$

Notons que, dans les formules (34), (35), (36) et (37), pour certaines valeurs de j , chaque terme en Σ peut disparaître.

L'hypothèse que $R(u)$ est paire réduit donc, dans le calcul de

chaque valeur $A_p(x_j)$, le nombre de multiplications de moitié, sans augmenter le nombre d'additions.

1122 - CAS OU $O(x)$ EST PAIRE

Soit :

$$O_q(x) = \sum_{i=0}^q b_i \cos i\omega x$$

avec

$$\begin{cases} b_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} O(x) dx \\ b_i = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} O(x) \cos i\omega x dx \quad 1 \leq i \leq q \end{cases}$$

le développement en série de cosinus limité à l'ordre q de $O(x)$ (réf. 43).

Nous approchons l'équation (1) par :

$$L(A_q) = O_q$$

et nous recherchons une solution (stricte) de cette dernière équation (qui sera alors une solution approchée de (1)) sous la forme :

$$A_q(x) = \sum_{i=0}^q d_i \cos i\omega x$$

A partir des relations (28), on démontre alors d'une façon analogue à celle du théorème 1 :

Théorème 10. Les coefficients a_i et b_i de $A_q(x)$ et $O_q(x)$ sont liés par :

$$b_i = \rho_i a_i \quad 0 \leq i \leq q$$

Dans le cas où $O(x)$ est une fonction échantillonnée supposée définie sur le support régulier $x_1', x_2', \dots, x_n'$ avec :

$$x'_i \text{ }^{(1)} = \frac{2i-1}{4n} T \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (38)$$

il est naturel de déterminer les coefficients b_i du polynôme approchant $O_q(x)$ pour que celui-ci l'interpole sur le support considéré.

Nous avons alors (réf. 30) :

Théorème 11. Si $q = n-1$, alors le problème ci-dessus admet toujours une solution unique :

$$\begin{cases} b_0 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n O(x'_j) \\ b_i &= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n O(x'_j) \cos i\omega x'_j \quad 1 \leq i \leq q \end{cases} \quad (39)$$

Désignons par $\mathcal{C}_q$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}_q$ formé des polynômes trigonométriques de la forme :

$$\sum_{i=0}^q c_i \cos i\omega x \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i$$

On remarque immédiatement, en vertu du théorème 11, que pour toute fonction échantillonnée définie sur le support indiqué, il existe toujours un polynôme unique appartenant à $\mathcal{C}_{n-1}$ qui l'interpole.

Dans la suite de ce paragraphe, nous supposons que $O \in \mathcal{C}_{n-1}$ (ce qui implique alors que $O_{n-1} = O$, d'après le théorème 11) et que les coefficients ρ_i sont tous non nuls.

On déduit alors du théorème 10 :

⁽¹⁾ Ces points appartiennent tous à l'intervalle $[0, \frac{T}{2}]$. Ils sont les milieux respectifs des intervalles partiels $[0, \frac{T}{2n}]$, $[\frac{T}{2n}, \frac{2T}{2n}]$, ..., $[\frac{(n-1)T}{2n}, \frac{T}{2}]$.

Théorème 12. Si

$$O(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cos i\omega x$$

alors l'équation (1) admet une solution (stricte) et une seule :

$$A(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b_i}{\rho_i} \cos i\omega x$$

Dans certains cas (cf. paragraphe 1112), il est nécessaire de tronquer $A(x)$ à un ordre $q \leq n-1$. On démontre alors (réf. 30) que ceci revient à approcher $A(x)$ au sens des moindres carrés sur le support $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$. Le polynôme d'approximation $A_q(x)$ ainsi obtenu est plus régulier que $A(x)$ et constitue, par conséquent, un polynôme de lissage au sens des moindres carrés de $A(x)$ sur ce support.

Introduisons les valeurs de $A_q(x)$ sur ce support. Alors une démonstration semblable à celle du théorème 4 montre que :

Théorème 13. On a :

$$\begin{bmatrix} A_q(x'_1) \\ A_q(x'_2) \\ \vdots \\ A_q(x'_n) \end{bmatrix} = [T_q] \begin{bmatrix} O(x'_1) \\ O(x'_2) \\ \vdots \\ O(x'_n) \end{bmatrix}$$

où T_q est une matrice carrée symétrique d'ordre n dont l'élément v_{ij}^q situé au croisement de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est défini par :

$$v_{ij}^q = Z_q(|i-j|) + Z_q(i+j-1) \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (40)$$

$Z_q(t)$ étant une fonction paire auxiliaire définie par :

$$Z_q(t) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2\rho_0} + \sum_{k=1}^q \frac{1}{\rho_k} \cos \frac{k\pi t}{n} \right)$$

D'après la relation (40), la matrice T_q sera entièrement déterminée si nous connaissons les $2n$ valeurs $Z_q(0), Z_q(1), \dots, Z_q(2n-1)$.

Mais :

$$Z_q(j) = Z_q(2n-j) \quad \forall j = n+1, n+2, \dots, 2n-1 \quad (41)$$

pour calculer les valeurs $A_q(x'_i)$, il suffit donc de calculer les $n+1$ valeurs $Z_q(0), Z_q(1), \dots, Z_q(n)$ puis déduire les valeurs $Z_q(n+1), Z_q(n+2), \dots, Z_q(2n-1)$ à partir de ces dernières et d'utiliser, enfin, la formule directe :

$$A_q(x'_i) = \sum_{j=1}^n [Z_q(|i-j|) + Z_q(i+j-1)] \cdot O(x_j)$$

Notons, en outre, que la matrice T_q a une forme assez particulière : elle est symétrique à la fois par rapport à ses diagonales principale et secondaire. En effet, la symétrie par rapport à la diagonale secondaire est une conséquence immédiate de la relation (41).

Dans le cas où $O(x)$ est impaire, on utilisera des représentations approchées de $O(x)$ et de $A(x)$ par des combinaisons linéaires d'un nombre fini de sinus (réf. 18, 30, 43) :

$$\begin{cases} O_q(x) &= \sum_{i=1}^q b_i \sin i\omega x \\ A_q(x) &= \sum_{i=1}^q a_i \sin i\omega x \end{cases}$$

à partir desquelles, on déduira facilement des formulations et résultats semblables aux précédents. Mais nous ne les présenterons pas dans cet ouvrage.

12 - CAS DE DEUX VARIABLES

Nous généralisons la méthode proposée au cas de deux variables.

Désignons par $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions $B(x, y)$ définies sur le plan $\mathbb{R}^2$ et périodiques de périodes T_1 relative à la variable x et T_2 relative à la variable y . Soit $R(u, v)$ une fonction quelconque définie sur $\mathbb{R}^2$.

Définissons sur $\mathcal{P}$ un opérateur L défini par :

$$L(A) = A \ast R$$

ou encore

$$L(A)(x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} A(u, v) R(x-u, y-v) du dv$$

Comme dans le cas d'une variable, il est clair que L est un opérateur linéaire et que l'image $L(A)$ de tout élément $A \in \mathcal{P}$ est aussi un élément de $\mathcal{P}$.

On se propose de résoudre le problème suivant : étant donnée une fonction $O \in \mathcal{P}$, déterminer une fonction $A \in \mathcal{P}$ (si elle existe) solution de l'équation :

$$L(A) = O \quad (42)$$

121 - CAS OU $R(u, v)$ EST QUELCONQUE

Nous recherchons une solution de l'équation (42) sous forme d'une somme de série de cosinus et sinus :

$$\begin{aligned} A(x, y) = & a_{00} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_{j0} \cos j\omega_1 x + b_{j0} \sin j\omega_1 x + a_{0j} \cos j\omega_2 y + b_{0j} \sin j\omega_2 y) \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (a_{ij} \cos i\omega_1 x \cdot \cos j\omega_2 y + b_{ij} \cos i\omega_1 x \cdot \sin j\omega_2 y \\ & + c_{ij} \sin i\omega_1 x \cdot \cos j\omega_2 y + d_{ij} \sin i\omega_1 x \cdot \sin j\omega_2 y) \end{aligned} \quad (43)$$

ω_i étant la pulsation associée à la période T_i :

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i} \quad i = 1, 2$$

Développons $O(x, y)$ en série de cosinus et sinus. Nous obtenons (réf. 18) :

$$\begin{aligned} O(x, y) = e_{oo} + \sum_{j=1}^{\infty} (e_{jo} \cos j\omega_1 x + f_{jo} \sin j\omega_1 x + e_{oj} \cos j\omega_2 y + f_{oj} \sin j\omega_2 y) \\ + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (e_{ij} \cos i\omega_1 x \cdot \cos j\omega_2 y + f_{ij} \cos i\omega_1 x \cdot \sin j\omega_2 y \\ + g_{ij} \sin i\omega_1 x \cdot \cos j\omega_2 y + h_{ij} \sin i\omega_1 x \sin j\omega_2 y) \end{aligned} \quad (44)$$

où :

$$\left\{ \begin{aligned} e_{oo} &= \frac{1}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} O(x, y) dx dy \\ e_{jo} &= \frac{2}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} O(x, y) \cos j\omega_1 x dx dy \\ f_{jo} &= \frac{2}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} O(x, y) \sin j\omega_1 x dx dy \\ e_{oj} &= \frac{2}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} O(x, y) \cos j\omega_2 y dx dy \\ f_{oj} &= \frac{2}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} O(x, y) \sin j\omega_2 y dx dy \quad i, j \in \mathbb{N}^* \quad (45) \\ e_{ij} &= \frac{4}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} O(x, y) \cos i\omega_1 x \cos j\omega_2 y dx dy \\ f_{ij} &= \frac{4}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} O(x, y) \cos i\omega_1 x \sin j\omega_2 y dx dy \\ g_{ij} &= \frac{4}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} O(x, y) \sin i\omega_1 x \cos j\omega_2 y dx dy \\ h_{ij} &= \frac{4}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} O(x, y) \sin i\omega_1 x \sin j\omega_2 y dx dy \end{aligned} \right.$$

Dans les applications pratiques, on doit tronquer les sommes (43) et (44) à des sommes finies. Parmi les différentes sommes tronquées obtenues, nous ne considérons dans la suite de ce paragraphe que

$$\begin{aligned}
 A_{pq}(x, y) = & a_{oo} + \sum_{i=1}^p (a_{io} \cos i\omega_1 x + b_{io} \sin i\omega_1 x) \quad (46) \\
 & + \sum_{j=1}^q (a_{oj} \cos j\omega_2 y + b_{oj} \sin j\omega_2 y) \\
 & + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (a_{ij} \cos i\omega_1 x \cdot \cos j\omega_2 y + b_{ij} \cos i\omega_1 x \cdot \sin j\omega_2 y \\
 & + c_{ij} \sin i\omega_1 x \cdot \cos j\omega_2 y + d_{ij} \sin i\omega_1 x \cdot \sin j\omega_2 y)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 O_{pq}(x, y) = & e_{oo} + \sum_{i=1}^p (e_{io} \cos i\omega_1 x + f_{io} \sin i\omega_1 x) \quad (47) \\
 & + \sum_{j=1}^q (e_{oj} \cos j\omega_2 y + f_{oj} \sin j\omega_2 y) \\
 & + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (e_{ij} \cos i\omega_1 x \cos j\omega_2 y + f_{ij} \cos i\omega_1 x \cdot \sin j\omega_2 y \\
 & + g_{ij} \sin i\omega_1 x \cos j\omega_2 y + h_{ij} \sin i\omega_1 x \sin j\omega_2 y)
 \end{aligned}$$

pour lesquelles, nous établirons des résultats importants.

Le problème posé revient donc à la détermination de $A_{pq}(x, y)$, solution de l'équation approchée :

$$L(A_{pq}) = O_{pq}$$

1211. DETERMINATION DE $A_{pq}(x, y)$

Soient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_{jk} = \iint_{\mathbb{R}^2} R(u, v) \cos j\omega_1 u \cdot \cos k\omega_2 v \cdot du dv & j, k \geq 0 \\ \xi_{jk} = \iint_{\mathbb{R}^2} R(u, v) \cos j\omega_1 u \cdot \sin k\omega_2 v \cdot du dv & j \geq 0, k \geq 1 \\ \zeta_{jk} = \iint_{\mathbb{R}^2} R(u, v) \sin j\omega_1 u \cdot \cos k\omega_2 v \cdot du dv & j \geq 1, k \geq 0 \\ \mu_{jk} = \iint_{\mathbb{R}^2} R(u, v) \sin j\omega_1 u \cdot \sin k\omega_2 v \cdot du dv & j, k \geq 1 \end{array} \right. \quad (48)$$

et $\text{TF}(R)(\nu, \gamma)$ la transformée de Fourier de $R(u, v)$:

$$\text{TF}(R)(\nu, \gamma) = \iint_{\mathbb{R}^2} R(u, v) \cdot e^{-2\pi i(\nu u + \gamma v)} du dv$$

On vérifie aisément que les coefficients ρ_{jk} , ξ_{jk} , ζ_{jk} et μ_{jk} peuvent se calculer à partir des valeurs :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tau_1 &= \text{TF}(R) \left(\frac{-j}{T_1}, \frac{-k}{T_2} \right) \\ \tau_2 &= \text{TF}(R) \left(\frac{-j}{T_1}, \frac{k}{T_2} \right) \\ \tau_3 &= \text{TF}(R) \left(\frac{j}{T_1}, \frac{-k}{T_2} \right) \\ \tau_4 &= \text{TF}(R) \left(\frac{j}{T_1}, \frac{k}{T_2} \right) \end{array} \right.$$

par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_{jk} &= \frac{1}{4} (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4) \\ \xi_{jk} &= \frac{i}{4} (-\tau_1 + \tau_2 - \tau_3 + \tau_4) \\ \zeta_{jk} &= \frac{i}{4} (-\tau_1 - \tau_2 + \tau_3 + \tau_4) \\ \mu_{jk} &= \frac{1}{4} (-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \tau_4) \end{array} \right. \quad (49)$$

On obtient alors :

Théorème 14. Les coefficients des sommes finies $A_{pq}(x, y)$ et $O_{pq}(x, y)$ sont liés entre-eux par :

$$e_{00} = \rho_{00} a_{00} \quad (50)$$

$$\begin{cases} e_{i0} &= \rho_{i0} a_{i0} - \zeta_{i0} b_{i0} \\ f_{i0} &= \zeta_{i0} a_{i0} + \rho_{i0} b_{i0} \end{cases} \quad (51)$$

$$\begin{cases} e_{0j} &= \rho_{0j} a_{0j} - \xi_{0j} b_{0j} \\ f_{0j} &= \xi_{0j} a_{0j} + \rho_{0j} b_{0j} \end{cases} \quad (52)$$

$$\begin{cases} e_{ij} &= \rho_{ij} a_{ij} - \xi_{ij} b_{ij} - \zeta_{ij} c_{ij} + \mu_{ij} d_{ij} \\ f_{ij} &= \xi_{ij} a_{ij} + \rho_{ij} b_{ij} - \mu_{ij} c_{ij} - \zeta_{ij} d_{ij} \\ g_{ij} &= \zeta_{ij} a_{ij} - \mu_{ij} b_{ij} + \rho_{ij} c_{ij} - \xi_{ij} d_{ij} \\ h_{ij} &= \mu_{ij} a_{ij} + \zeta_{ij} b_{ij} + \xi_{ij} c_{ij} + \rho_{ij} d_{ij} \end{cases} \quad (53)$$

pour $i = 1, 2, \dots, p$ et $j = 1, 2, \dots, q$.

Démonstration.

En effet, par une démonstration analogue à celle des formules (11) et (12), on démontre que :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} R(x-u, y-v) \cos i\omega_1 u \, du \, dv = \rho_{i0} \cos i\omega_1 x + \zeta_{i0} \sin i\omega_1 x \quad i \geq 0$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} R(x-u, y-v) \sin j\omega_1 u \, du \, dv = -\zeta_{j0} \cos j\omega_1 x + \rho_{j0} \sin j\omega_1 x \quad j \geq 1$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} R(x-u, y-v) \cos i\omega_2 v \, du \, dv = \rho_{0i} \cos i\omega_2 y + \xi_{0i} \sin i\omega_2 y \quad i \geq 0$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} R(x-u, y-v) \sin j\omega_2 v \, du \, dv = -\xi_{0j} \cos j\omega_2 y + \rho_{0j} \sin j\omega_2 y \quad j \geq 1$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} R(x-u, y-v) \cos i\omega_1 u \cos j\omega_2 v \, du \, dv &= \rho_{ij} \cos i\omega_1 x \cdot \cos j\omega_2 y \quad i, j \geq 0 \\
&+ \xi_{ij} \cos i\omega_1 x \sin j\omega_2 y + \zeta_{ij} \sin i\omega_1 x \cos j\omega_2 y + \mu_{ij} \sin i\omega_1 x \sin j\omega_2 y \\
\iint_{\mathbb{R}^2} R(x-u, y-v) \cos i\omega_1 u \sin j\omega_2 v \, du \, dv &= -\xi_{ij} \cos i\omega_1 x \cos j\omega_2 y \quad i \geq 0, j \geq 1 \\
&+ \rho_{ij} \cos i\omega_1 x \cdot \sin j\omega_2 y - \mu_{ij} \sin i\omega_1 x \cos j\omega_2 y + \zeta_{ij} \sin i\omega_1 x \sin j\omega_2 y \\
\iint_{\mathbb{R}^2} R(x-u, y-v) \sin i\omega_1 u \cos j\omega_2 v \, du \, dv &= -\zeta_{ij} \cos i\omega_1 x \cos j\omega_2 y \quad i \geq 1, j \geq 0 \\
&- \mu_{ij} \cos i\omega_1 x \sin j\omega_2 y + \rho_{ij} \sin i\omega_1 x \cdot \cos j\omega_2 y + \xi_{ij} \sin i\omega_1 x \sin j\omega_2 y \\
\text{et :} \\
\iint_{\mathbb{R}^2} R(x-u, y-v) \sin i\omega_1 u \sin j\omega_2 v \, du \, dv &= \mu_{ij} \cos i\omega_1 x \cos j\omega_2 y \quad i, j \geq 1 \\
&- \zeta_{ij} \cos i\omega_1 x \sin j\omega_2 y - \xi_{ij} \sin i\omega_1 x \cos j\omega_2 y + \rho_{ij} \sin i\omega_1 x \sin j\omega_2 y
\end{aligned}$$

D'autre part, on a par définition :

$$\begin{aligned}
O_{pq}(x, y) &= L(A_{pq})(x, y) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \left[a_{00} + \sum_{i=1}^p (a_{i0} \cos i\omega_1 u + b_{i0} \sin i\omega_1 u) \right. \\
&\quad + \sum_{j=1}^q (a_{0j} \cos j\omega_2 v + b_{0j} \sin j\omega_2 v) \\
&\quad + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (a_{ij} \cos i\omega_1 u \cos j\omega_2 v + b_{ij} \cos i\omega_1 u \\
&\quad \left. \sin j\omega_2 v + c_{ij} \sin i\omega_1 u \cos j\omega_2 v + d_{ij} \sin i\omega_1 u \sin j\omega_2 v) \right] R(x-u, y-v) \, du \, dv
\end{aligned}$$

Comme sous l'intégrale, la somme n'a qu'un nombre fini de termes, on peut donc permuter les signes $\sum$ et $\int$. D'où en vertu des identités ci-dessus :

$$\begin{aligned}
O_{pq}(x, y) &= \rho_{00} a_{00} + \sum_{i=1}^p \left[(\rho_{i0} a_{i0} - \zeta_{i0} b_{i0}) \cos i\omega_1 x + \right. \\
&\quad \left. (\zeta_{i0} a_{i0} + \rho_{i0} b_{i0}) \sin i\omega_1 x \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^q [(\rho_{oj} a_{oj} - \xi_{oj} b_{oj}) \cos j\omega_2 y + (\xi_{oj} a_{oj} + \rho_{oj} b_{oj}) \sin j\omega_2 y] \\
& + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q [(\rho_{ij} a_{ij} - \xi_{ij} b_{ij} - \zeta_{ij} e_{ij} + \mu_{ij} d_{ij}) \cos i\omega_1 x \cos j\omega_2 y \\
& + (\xi_{ij} a_{ij} + \rho_{ij} b_{ij} - \mu_{ij} c_{ij} - \zeta_{ij} d_{ij}) \cos i\omega_1 x \sin j\omega_2 y \\
& + (\zeta_{ij} a_{ij} - \mu_{ij} b_{ij} + \rho_{ij} c_{ij} - \xi_{ij} d_{ij}) \sin i\omega_1 x \cos j\omega_2 y \\
& + (\mu_{ij} a_{ij} + \zeta_{ij} b_{ij} + \xi_{ij} c_{ij} + \rho_{ij} d_{ij}) \sin i\omega_1 x \sin j\omega_2 y] \\
& \qquad \qquad \qquad (C.Q.F.D)
\end{aligned}$$

Ce dernier théorème permet de déterminer les coefficients a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} et d_{ij} de $A_{pq}(x, y)$ à partir des coefficients e_{ij} , f_{ij} , g_{ij} et h_{ij} de $O_{pq}(x, y)$.

En effet, de la relation (50) on déduit :

$$a_{oo} = \frac{e_{oo}}{\rho_{oo}} \quad (54)$$

Les relations (51) et (52) forment deux systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues admettant pour solutions :

$$\begin{cases} a_{io} = (\rho_{io} e_{io} + \zeta_{io} f_{io}) / (\rho_{io}^2 + \zeta_{io}^2) \\ b_{io} = (-\zeta_{io} e_{io} + \rho_{io} f_{io}) / (\rho_{io}^2 + \zeta_{io}^2) \end{cases} \quad 1 \leq i \leq p \quad (55)$$

$$\begin{cases} a_{oj} = (\rho_{oj} e_{oj} + \xi_{oj} f_{oj}) / (\rho_{oj}^2 + \xi_{oj}^2) \\ b_{oj} = (-\xi_{oj} e_{oj} + \rho_{oj} f_{oj}) / (\rho_{oj}^2 + \xi_{oj}^2) \end{cases} \quad 1 \leq j \leq q \quad (56)$$

Les relations (53) forment un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues. Il a pour solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ij} = \alpha_{ij} e_{ij} + \beta_{ij} f_{ij} + \gamma_{ij} g_{ij} + \lambda_{ij} h_{ij} \\ b_{ij} = -\beta_{ij} e_{ij} + \alpha_{ij} f_{ij} - \lambda_{ij} g_{ij} + \gamma_{ij} h_{ij} \\ c_{ij} = -\gamma_{ij} e_{ij} - \lambda_{ij} f_{ij} + \alpha_{ij} g_{ij} + \beta_{ij} h_{ij} \\ d_{ij} = \lambda_{ij} e_{ij} - \gamma_{ij} f_{ij} - \beta_{ij} g_{ij} + \alpha_{ij} h_{ij} \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q \quad (54)$$

dans lesquelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{ij} = (\rho_{ij}^3 + \rho_{ij} \xi_{ij}^2 + \rho_{ij} \zeta_{ij}^2 - \rho_{ij} \mu_{ij}^2 + 2 \mu_{ij} \xi_{ij} \zeta_{ij}) / \Delta_{ij} \\ \beta_{ij} = (\xi_{ij}^3 + \xi_{ij} \rho_{ij}^2 + \xi_{ij} \mu_{ij}^2 - \xi_{ij} \zeta_{ij}^2 + 2 \mu_{ij} \zeta_{ij} \rho_{ij}) / \Delta_{ij} \\ \gamma_{ij} = (\zeta_{ij}^3 + \zeta_{ij} \rho_{ij}^2 + \zeta_{ij} \mu_{ij}^2 - \zeta_{ij} \xi_{ij}^2 + 2 \mu_{ij} \xi_{ij} \rho_{ij}) / \Delta_{ij} \\ \lambda_{ij} = (\mu_{ij}^3 + \mu_{ij} \xi_{ij}^2 + \mu_{ij} \zeta_{ij}^2 - \mu_{ij} \rho_{ij}^2 + 2 \rho_{ij} \zeta_{ij} \xi_{ij}) / \Delta_{ij} \end{array} \right. \quad (58)$$

avec :

$$\Delta_{ij} = [(\rho_{ij} + \mu_{ij})^2 + (\xi_{ij} - \zeta_{ij})^2] \cdot [(\rho_{ij} - \mu_{ij})^2 + (\xi_{ij} + \zeta_{ij})^2]$$

Cependant, il faut noter que les formules (54), (55), (56) et (57) n'ont de sens que si :

$$\rho_{00}, \rho_{i0}^2 + \zeta_{i0}^2, \rho_{0j}^2 + \xi_{0j}^2 \text{ et } \Delta_{ij}$$

sont tous non nuls. Ainsi, nous introduisons, dans toute la suite, l'hypothèse complémentaire que ces quantités sont toutes différentes de zéro.

1212 - CAS OU $O(x,y)$ EST UNE FONCTION ECHANTILLONNEE - CAS DE SOLUTION STRICTE.

Considérons le cas où $O(x,y)$ est définie par ses valeurs numériques sur un support "régulier séparable" S , ensemble de points (x_i, y_j)

pour $i = 1, 2, \dots, m$ et $j = 1, 2, \dots, n$ tels que $x_1, x_2, \dots, x_m$ et $y_1, y_2, \dots, y_n$ forment deux suites de valeurs équidistantes.

Nous pouvons toujours supposer que ces points sont définis par :

$$\begin{cases} x_i = \frac{i-1}{m} T_1 & i = 1, 2, \dots, m \\ y_j = \frac{j-1}{n} T_2 & j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (59)$$

Comme dans le paragraphe 1112, il est alors naturel de déterminer les coefficients e_{ij} , f_{ij} , g_{ij} et h_{ij} pour que $O_{pq}(x, y)$ "interpole" $O(x, y)$ sur le support S :

$$O_{pq}(x_i, y_j) = O(x_i, y_j) \quad \forall (x_i, y_j) \in S.$$

Théorème 15. (réf. 30) Si m et n sont impairs et égaux respectivement à $2p+1$ et $2q+1$, alors ce problème admet toujours une solution unique :

$$\left\{ \begin{aligned} e_{00} &= \frac{1}{mn} \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^n O(x_k, y_\ell) \\ e_{i0} &= \frac{2}{mn} \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^n O(x_k, y_\ell) \cos i\omega_1 x_k \\ f_{i0} &= \frac{2}{mn} \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^n O(x_k, y_\ell) \sin i\omega_1 x_k \\ e_{0j} &= \frac{2}{mn} \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^n O(x_k, y_\ell) \cos j\omega_2 y_\ell \\ f_{0j} &= \frac{2}{mn} \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^n O(x_k, y_\ell) \sin j\omega_2 y_\ell \\ e_{ij} &= \frac{4}{mn} \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^n O(x_k, y_\ell) \cos i\omega_1 x_k \cos j\omega_2 y_\ell \end{aligned} \right. \quad (60)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_{ij} & = & \frac{4}{mn} \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^n O(x_k, y_\ell) \cos i\omega_1 x_k \cdot \sin j\omega_2 y_\ell \\ g_{ij} & = & \frac{4}{mn} \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^n O(x_k, y_\ell) \sin i\omega_1 x_k \cdot \cos j\omega_2 y_\ell \\ h_{ij} & = & \frac{4}{mn} \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^n O(x_k, y_\ell) \sin i\omega_1 x_k \cdot \sin j\omega_2 y_\ell \end{array} \right.$$

pour $i = 1, 2, \dots, p$ et $j = 1, 2, \dots, q$.

Désignons par $\mathcal{E}_{pq}$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}$ formé des polynômes trigonométriques de la forme

$$\begin{aligned} e'_{00} + \sum_{i=1}^p (e'_{i0} \cos i\omega_1 x + f'_{i0} \sin i\omega_1 x) + \sum_{j=1}^q (e'_{0j} \cos j\omega_2 y + f'_{0j} \sin j\omega_2 y) \\ + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (e'_{ij} \cos i\omega_1 x \cos j\omega_2 y + f'_{ij} \cos i\omega_1 x \sin j\omega_2 y \\ + g'_{ij} \sin i\omega_1 x \cos j\omega_2 y + h'_{ij} \sin i\omega_1 x \sin j\omega_2 y) \end{aligned}$$

où les coefficients e'_{ij} , f'_{ij} , g'_{ij} et h'_{ij} sont des nombres réels.

Posons :

$$\begin{cases} r & = (m-1)/2 \\ s & = (n-1)/2 \end{cases}$$

Le théorème 15 implique donc que, pour toute fonction échantillonnée définie sur le support S , il existe toujours une fonction unique appartenant à $\mathcal{E}_{rs}$ qui l'interpole.

CAS DE SOLUTION STRICTE

Supposons maintenant que $O \in \mathcal{E}_{rs}$. On déduit alors du théorème 15 :

Théorème 16. Si

$$\begin{aligned}
 O(x, y) = & e_{oo} + \sum_{i=1}^r (e_{io} \cos i\omega_1 x + f_{io} \sin i\omega_1 x) \\
 & + \sum_{j=1}^s (e_{oj} \cos j\omega_2 y + f_{oj} \sin j\omega_2 y) \\
 & + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (e_{ij} \cos i\omega_1 x \cos j\omega_2 y + f_{ij} \cos i\omega_1 x \sin j\omega_2 y \\
 & + g_{ij} \sin i\omega_1 x \cos j\omega_2 y + h_{ij} \sin i\omega_1 x \sin j\omega_2 y)
 \end{aligned} \quad (61)$$

alors l'équation(42) admet une solution (stricte) unique :

$$\begin{aligned}
 A(x, y) = & a_{oo} + \sum_{i=1}^r (a_{io} \cos i\omega_1 x + b_{io} \sin i\omega_1 x) \\
 & + \sum_{j=1}^s (a_{oj} \cos j\omega_2 y + b_{oj} \sin j\omega_2 y) \\
 & + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (a_{ij} \cos i\omega_1 x \cos j\omega_2 y + b_{ij} \cos i\omega_1 x \sin j\omega_2 y \\
 & + c_{ij} \sin i\omega_1 x \cos j\omega_2 y + d_{ij} \sin i\omega_1 x \sin j\omega_2 y)
 \end{aligned} \quad (62)$$

les coefficients a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} et d_{ij} étant définis par les relations (54), (55), (56) et (57).

Dans la suite de cet exposé, les formules obtenues seront souvent assez lourdes et il sera commode d'utiliser les notations matricielles.

De plus, à chaque matrice rectangulaire :

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1q} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{p1} & w_{p2} & \dots & w_{pq} \end{bmatrix} \quad (63)$$

nous associons une matrice colonne, notée W^c , définie par :

$$W^c = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_q \end{bmatrix} \quad (64)$$

où $W_1, W_2, \dots, W_q$ désignent les q matrices colonnes de W .

La représentation naturelle d'une matrice à deux indices sous la forme (63) est difficile à étendre à trois indices. La représentation sous la forme (64) s'introduit en particulier lorsqu'on utilise les produits tensoriels, elle est par contre facile à étendre à trois indices ou plus.

Une propriété importante reliant ces deux notations est la suivante :

Propriété 1. Soient U, T, V et W quatre matrices rectangulaires de dimensions respectives $(p, q), (r, s), (s, q)$ et (r, p) .

Alors, on a :

$$(U \otimes T) \cdot V^c = W^c \iff T \cdot V \cdot U^t = W \quad (65)$$

où U^t désigne la transposée de U .

Avant de démontrer cette propriété, nous allons rappeler d'abord la définition et quelques autres propriétés élémentaires du produit tensoriel que nous représentons par $\otimes$.

Produit tensoriel ⁽¹⁾ de deux matrices

Définition. Soient A et B deux matrices de dimensions respectives (p, q) et (r, s) , d'éléments respectifs a_{ij} et $b_{k\ell}$. On définit le produit tensoriel de A et B , noté $A \otimes B$, par :

⁽¹⁾ Ce produit est aussi appelé produit de Kronecker.

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1q}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2q}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1}B & a_{p2}B & \dots & a_{pq}B \end{bmatrix}$$

Cette matrice, en explicitant les produits $a_{ij}B$, a pour dimensions (pr, qs).

Propriétés 2. (réf. 3,30) :

- (1) $A \otimes B \neq B \otimes A$ en général.
- (2) $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C) = A \otimes B \otimes C$
- (3) $(A \otimes B)^t = A^t \otimes B^t$
- (4) Si les produits écrits ont un sens :
 $(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = (A \cdot C) \otimes (B \cdot D)$
- (5) Si A et B sont des matrices carrées symétriques, $A \otimes B$ est aussi une matrice carrée symétrique.
- (6) Si A et B sont des matrices carrées inversibles,
 $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$
- (7) Si A et B sont des matrices carrées ayant respectivement pour valeurs propres $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ et $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q\}$ et pour vecteurs propres $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ et $\{W_1, W_2, \dots, W_q\}$ alors $A \otimes B$ a pour valeurs propres $\{\lambda_i \mu_j$ pour $i = 1, 2, \dots, p$ et $j = 1, 2, \dots, q\}$ et pour vecteurs propres $\{V_i \otimes W_j$ pour $i = 1, 2, \dots, p$ et $j = 1, 2, \dots, q\}$.

Démonstration de la propriété 1.

Posons :

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1q} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{p1} & u_{p2} & \dots & u_{pq} \end{bmatrix}$$

et désignons par $\{U'_1, U'_2, \dots, U'_p\}$, $\{V_1, V_2, \dots, V_q\}$ et $\{W_1, W_2, \dots, W_p\}$ les ensembles des matrices colonnes respectifs de U^t , V et W .

On déduit alors du second membre de (65) :

$$W_j = T \cdot V \cdot U'_j \quad 1 \leq j \leq p$$

D'autre part, en développant le premier membre, on obtient :

$$W_j = (U_j^{t'} \otimes T) \cdot V^c \quad 1 \leq j \leq p$$

(dans cette relation, $U_j^{t'}$ ne représente rien d'autre que la $j^{\text{ième}}$ ligne de U), d'où :

$$\begin{aligned} W_j &= \sum_{i=1}^q u_{ji} \cdot T \cdot V_i \\ &= T \cdot \sum_{i=1}^q u_{ji} \cdot V_i \\ &= T \cdot V \cdot U'_j \end{aligned}$$

(C.Q.F.D.)

Notations matricielles utilisées.

Nous utilisons les notations suivantes :

$$\otimes = \begin{bmatrix} O(x_1, y_1) & O(x_2, y_1) & \dots & O(x_m, y_1) \\ O(x_1, y_2) & O(x_2, y_2) & \dots & O(x_m, y_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O(x_1, y_n) & O(x_2, y_n) & \dots & O(x_m, y_n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{H} = \begin{bmatrix} A(x_1, y_1) & A(x_2, y_1) & \dots & A(x_m, y_1) \\ A(x_1, y_2) & A(x_2, y_2) & \dots & A(x_m, y_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A(x_1, y_n) & A(x_2, y_n) & \dots & A(x_m, y_n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{H}_{pq} = \begin{bmatrix} A_{pq}(x_1, y_1) & A_{pq}(x_2, y_1) & \dots & A_{pq}(x_m, y_1) \\ A_{pq}(x_1, y_2) & A_{pq}(x_2, y_2) & \dots & A_{pq}(x_m, y_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{pq}(x_1, y_n) & A_{pq}(x_2, y_n) & \dots & A_{pq}(x_m, y_n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{Q}_{pq} = \begin{bmatrix} e_{00} & e_{10} & f_{10} & \dots & e_{p0} & f_{p0} \\ e_{01} & e_{11} & g_{11} & \dots & e_{p1} & g_{p1} \\ f_{01} & f_{11} & h_{11} & \dots & f_{p1} & h_{p1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{0q} & e_{1q} & g_{1q} & \dots & e_{pq} & g_{pq} \\ f_{0q} & f_{1q} & h_{1q} & \dots & f_{pq} & h_{pq} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C}_{pq} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{10} & b_{10} & \dots & a_{p0} & b_{p0} \\ a_{01} & a_{11} & c_{11} & \dots & a_{p1} & c_{p1} \\ b_{01} & b_{11} & d_{11} & \dots & b_{p1} & d_{p1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{0q} & a_{1q} & c_{1q} & \dots & a_{pq} & c_{pq} \\ b_{0q} & b_{1q} & d_{1q} & \dots & b_{pq} & d_{pq} \end{bmatrix}$$

$$U_p = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & \cos \omega_1 x_1 & \sin \omega_1 x_1 & \dots & \cos p \omega_1 x_1 & \sin p \omega_1 x_1 \\ 1/\sqrt{2} & \cos \omega_1 x_2 & \sin \omega_1 x_2 & \dots & \cos p \omega_1 x_2 & \sin p \omega_1 x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/\sqrt{2} & \cos \omega_1 x_m & \sin \omega_1 x_m & \dots & \cos p \omega_1 x_m & \sin p \omega_1 x_m \end{bmatrix}$$

$$V_q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & \cos \omega_2 y_1 & \sin \omega_2 y_1 & \dots & \cos q \omega_2 y_1 & \sin q \omega_2 y_1 \\ 1/\sqrt{2} & \cos \omega_2 y_2 & \sin \omega_2 y_2 & \dots & \cos q \omega_2 y_2 & \sin q \omega_2 y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/\sqrt{2} & \cos \omega_2 y_n & \sin \omega_2 y_n & \dots & \cos q \omega_2 y_n & \sin q \omega_2 y_n \end{bmatrix}$$

Avec ces notations, on vérifie aisément que les relations (60), (61) et (62) peuvent s'écrire d'une façon simple et commode (réf. 30) :

$$Q_{pq}^c = \frac{4}{mn} (U_p^t \otimes V_q^t) \cdot \Theta^c$$

$$O(x, y) = \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \omega_1 x \sin \omega_1 x \dots \cos r \omega_1 x \sin r \omega_1 x \right] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \omega_2 y \sin \omega_2 y \dots \cos s \omega_2 y \sin s \omega_2 y \right] \right\} \cdot Q_{rs}^c$$

et

$$A(x, y) = \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \omega_1 x \sin \omega_1 x \dots \cos r \omega_1 x \sin r \omega_1 x \right] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \omega_2 y \sin \omega_2 y \dots \cos s \omega_2 y \sin s \omega_2 y \right] \right\} \cdot C_{rs}^c \quad (66)$$

On a, en outre, en donnant, dans cette dernière expression, à x et y toutes les valeurs x_i, y_j :

$$H^c = (U_r \otimes V_s) \cdot C_{rs}^c \quad (67)$$

L'expression (67) est d'écriture simple. Cependant, la structure très complexe de la matrice C_{rs} et les grandes dimensions des matrices U_r , V_s et C_{rs} la rendent très difficile à programmer. Nous allons maintenant la mettre sous une autre forme bien adaptée au traitement numérique.

Pour cela, posons pour faciliter l'exposé :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_{00} &= 1/\rho_{00} \\ \alpha_{io} &= \rho_{io}/(\rho_{io}^2 + \zeta_{io}^2) \quad i = 1, 2, \dots, r \\ \alpha_{oj} &= \rho_{oj}/(\rho_{oj}^2 + \xi_{oj}^2) \quad j = 1, 2, \dots, s \\ \beta_{oj} &= \xi_{oj}/(\rho_{oj}^2 + \xi_{oj}^2) \quad j = 1, 2, \dots, s \\ \gamma_{io} &= \zeta_{io}/(\rho_{io}^2 + \zeta_{io}^2) \quad i = 1, 2, \dots, r \end{array} \right. \quad (68)$$

Théorème 17. On a :

$$A^C = \Phi \cdot \Theta^C \quad (69)$$

où Φ est une matrice carrée de dimension mn dont l'élément $\varphi_{k\ell, \tau t}$ situé au croisement de la $(kn + \ell)^{\text{ème}}$ ligne et $(\tau n + t)^{\text{ème}}$ colonne est défini par :

$$\varphi_{k\ell, \tau t} = \sum_{i=1}^4 W^i(\tau - k, t - \ell) \quad 1 \leq k, \tau \leq m, 1 \leq \ell, t \leq n \quad (70)$$

où $W^i(u, v)$ pour $i = 1, 2, 3, 4$ sont des fonctions définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} W^1(u, v) = \frac{1}{m} (V^0(v) + 2 \sum_{i=1}^r V^i(v) \cos \frac{2\pi i u}{m}) \\ W^2(u, v) = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^r X^i(v) \sin \frac{2\pi i u}{m} \end{array} \right. \quad (71)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W^3(u, v) = \frac{1}{m} (Y^0(v) + 2 \sum_{i=1}^r Y^i(v) \cos \frac{2\pi i u}{m}) \\ W^4(u, v) = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^r Z^i(v) \sin \frac{2\pi i u}{m} \end{array} \right.$$

$\{V^i(v)\}_{0 \leq i \leq r}$, $\{X^i(v)\}_{1 \leq i \leq r}$, $\{Y^i(v)\}_{0 \leq i \leq r}$ et $\{Z^i(v)\}_{1 \leq i \leq r}$

étant des familles de fonctions définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} V^i(v) = \frac{1}{n} (\alpha_{i0} + 2 \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} \cos \frac{2\pi j v}{n}) \\ X^i(v) = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^s \lambda_{ij} \sin \frac{2\pi j v}{n} \\ Y^i(v) = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^s \beta_{ij} \sin \frac{2\pi j v}{n} \\ Z^i(v) = \frac{1}{n} (\gamma_{i0} + 2 \sum_{j=1}^s \gamma_{ij} \cos \frac{2\pi j v}{n}) \end{array} \right. \quad (72)$$

Démonstration.

Remplaçons dans la relation (62) les coefficients a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} et d_{ij} par leurs valeurs respectives données par les relations (54), (55), (56), (57) et (68) et attribuons à (x, y) une valeur quelconque (x_k, y_ℓ) du support. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} A(x_k, y_\ell) &= \alpha_{00} e_{00} + \sum_{i=1}^r [(\alpha_{i0} e_{i0} + \gamma_{i0} f_{i0}) \cos i\omega_1 x_k + \\ &\quad (-\gamma_{i0} \ell_{i0} + \alpha_{i0} f_{i0}) \sin i\omega_1 x_k] \\ &+ \sum_{j=1}^s [(\alpha_{0j} e_{0j} + \beta_{0j} f_{0j}) \cos j\omega_2 y_\ell + (-\beta_{0j} e_{0j} + \alpha_{0j} f_{0j}) \sin j\omega_2 y_\ell] \\ &+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s [(\alpha_{ij} e_{ij} + \beta_{ij} f_{ij} + \gamma_{ij} g_{ij} + \lambda_{ij} h_{ij}) \cos i\omega_1 x_k \cos j\omega_2 y_\ell \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-\beta_{ij} e_{ij} + \alpha_{ij} f_{ij} - \lambda_{ij} g_{ij} + \gamma_{ij} h_{ij}) \cos i\omega_1 x_k \sin j\omega_2 y_\ell \\
& + (-\gamma_{ij} e_{ij} - \lambda_{ij} f_{ij} + \alpha_{ij} g_{ij} + \beta_{ij} h_{ij}) \sin i\omega_1 x_k \cos j\omega_2 y_\ell \\
& + (\lambda_{ij} e_{ij} - \gamma_{ij} f_{ij} - \beta_{ij} g_{ij} + \alpha_{ij} h_{ij}) \sin i\omega_1 x_k \cdot \sin j\omega_2 y_\ell]
\end{aligned}$$

Substituons, dans cette dernière expression, les coefficients e_{ij} , f_{ij} , g_{ij} et h_{ij} par leurs valeurs respectives données par les relations (60). Nous obtenons alors par un calcul élémentaire :

$$A(x_k, y_\ell) = \sum_{\tau=1}^m \sum_{t=1}^n \left(\sum_{i=1}^4 \epsilon_{k\ell, \tau t}^i \right) \cdot O(x_\tau, y_t) \quad (73)$$

où

$$\epsilon_{k\ell, \tau t}^1 = \frac{1}{mn} \left[\alpha_{00} + 2 \sum_{i=1}^r \alpha_{i0} \cos i\omega_1 (x_\tau - x_k) + 2 \sum_{j=1}^s \alpha_{0j} \cos j\omega_2 (y_t - y_\ell) \right] \quad (74)$$

$$+ 4 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} \cos i\omega_1 (x_\tau - x_k) \cdot \cos j\omega_2 (y_t - y_\ell)]$$

$$\epsilon_{k\ell, \tau t}^2 = \frac{4}{mn} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \lambda_{ij} \sin i\omega_1 (x_\tau - x_k) \cdot \sin j\omega_2 (y_t - y_\ell)$$

$$\epsilon_{k\ell, \tau t}^3 = \frac{2}{mn} \left[\sum_{j=1}^s \beta_{0j} \sin j\omega_2 (y_t - y_\ell) + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \beta_{ij} \cos i\omega_1 (x_\tau - x_k) \right. \\ \left. \sin j\omega_2 (y_t - y_\ell) \right]$$

$$\epsilon_{k\ell, \tau t}^4 = \frac{2}{mn} \left[\sum_{i=1}^r \gamma_{i0} \sin i\omega_1 (x_\tau - x_k) + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \gamma_{ij} \sin i\omega_1 (x_\tau - x_k) \right. \\ \left. \cos j\omega_2 (y_t - y_\ell) \right]$$

Comme la relation (73) est valable pour tous k et ℓ , $1 \leq k \leq m$, $1 \leq \ell \leq n$, il ne nous reste donc qu'à démontrer que :

$$\epsilon_{k\ell, \tau t}^i = W^i (\tau - k, t - \ell) \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (75)$$

Nous ne démontrons l'assertion (75) que pour $i = 1$, car pour les autres valeurs de i , elle se démontre, en fait, de la même façon.

En effet, remplaçons dans l'expression (75), x_τ , x_k , y_t et y_ℓ par leurs valeurs respectives données par les formules (59). On obtient alors, après groupement des termes :

$$\begin{aligned}
 G_{k\ell, \tau t}^1 &= \frac{1}{mn} \left[(\alpha_{00} + 2 \sum_{j=1}^s \alpha_{0j} \cos \frac{2\pi j(t-\ell)}{n} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^r (\alpha_{i0} + 2 \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} \cos \frac{2\pi j(t-\ell)}{n}) \cos \frac{2\pi i(\tau-\ell)}{m} \right] \\
 &= \frac{1}{m} \cdot \left[V^0(t-\ell) + 2 \sum_{i=1}^r V^i(t-\ell) \cos \frac{2\pi i(\tau-k)}{m} \right] \\
 &= W^1(\tau-k, t-\ell) \\
 &\quad \text{(C.Q.F.D.)}
 \end{aligned}$$

Le théorème 17 définit un algorithme de calcul simple des éléments de la matrice $\mathfrak{g}$ à partir des $4(2m-1)(2n-1)$ valeurs $W^i(u,v)$ pour $i = 1, 2, 3, 4$; $u = -(m-1), \dots, 0, \dots, m-1$ et $v = -(n-1), \dots, 0, \dots, n-1$. Cependant, en tenant compte de la périodicité, de la parité et de l'impairité des fonctions $W^i(u,v)$ par rapport à chacune des variables u et v , on remarque que, pour connaître toutes les $4(2m-1)(2n-1)$ valeurs ci-dessus, il suffit de calculer seulement les $4(r+1)(s+1)$ valeurs $W^i(u,v)$ pour $i = 1, 2, 3, 4$; $u = 0, 1, \dots, r$ et $v = 0, 1, \dots, s$.

De plus, $\mathfrak{g}$ est en général une matrice de très grandes dimensions et il est souvent impossible de la garder en mémoire centrale. Pour calculer les valeurs $A(x_k, y_\ell)$, il suffit alors d'utiliser la formule directe :

$$A(x_k, y_\ell) = \sum_{\tau=1}^m \sum_{t=1}^n \left(\sum_{i=1}^4 W^i(\tau-k, t-\ell) \right) \cdot O(x_\tau, y_t) \quad (76)$$

D'autre part, comme dans le paragraphe 1112, on peut être amené à tronquer, dans certain cas, le polynôme $A(x, y)$ à un ordre (p, q) .

On démontre alors :

Théorème 18. (réf. 30). Soient $E \in \mathcal{C}_{r, s}$ et Ω une fonction réelle positive définie sur $\mathcal{C}_{pq}$ par :

$$\Omega(P) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [P(x_i, y_j) - E(x_i, y_j)]^2$$

Alors si E_{pq} est le polynôme E tronqué à l'ordre (p, q) , on a :

$$\Omega(E_{pq}) = \min_{P \in \mathcal{C}_{pq}} \Omega(P)$$

On dit alors que, parmi les polynômes appartenant à $\mathcal{C}_{pq}$, $E_{pq}(x, y)$ est la meilleure approximation au sens des moindres carrés de $E(x, y)$ sur le support S .

$E_{pq}(x, y)$ est donc un polynôme de lissage au sens des moindres carrés de $E(x, y)$ sur S et il en sera de même pour $O_{pq}(x, y)$ et $O(x, y)$, ainsi que $A_{pq}(x, y)$ et $A(x, y)$.

On démontre alors d'une façon analogue à celle du théorème 17

Théorème 19. On a :

$$R_{pq}^c = \Phi_{pq} \cdot \Theta^c \quad (77)$$

où Φ_{pq} est une matrice carrée de dimension mn dont l'élément $\Phi_{k\ell, \tau t}^{pq}$ situé au croisement de la $(kn+\ell)$ ^{ème} ligne et $(\tau n+t)$ ^{ème} colonne est défini par :

$$\Phi_{k\ell, \tau t}^{pq} = \sum_{i=1}^4 W^i(\tau-k, t-\ell) \quad 1 \leq k, \tau \leq m, 1 \leq \ell, t \leq n \quad (78)$$

dans laquelle $W_{pq}^1(u, v)$, pour $1 \leq i \leq 4$, sont des fonctions définies par :

$$\left\{ \begin{aligned} W_{pq}^1(u, v) &= \frac{1}{m} (V_q^0(v) + 2 \sum_{i=1}^p V_q^i(v) \cos \frac{2\pi i u}{m}) \\ W_{pq}^2(u, v) &= \frac{2}{m} \sum_{i=1}^p X_q^i(v) \sin \frac{2\pi i u}{m} \\ W_{pq}^3(u, v) &= \frac{1}{m} (Y_q^0(v) + 2 \sum_{i=1}^p Y_q^i(v) \cos \frac{2\pi i u}{m}) \\ W_{pq}^4(u, v) &= \frac{2}{m} \sum_{i=1}^p Z_q^i(v) \sin \frac{2\pi i u}{m} \end{aligned} \right. \quad (79)$$

$\{V_q^i(v)\}_{0 \leq i \leq p}$, $\{X_q^i(v)\}_{1 \leq i \leq p}$, $\{Y_q^i(v)\}_{0 \leq i \leq p}$ et $\{Z_q^i(v)\}_{1 \leq i \leq p}$

étant elles-mêmes des familles de fonctions définies par :

$$\left\{ \begin{aligned} V_q^i(v) &= \frac{1}{n} (\alpha_{i0} + 2 \sum_{j=1}^q \alpha_{ij} \cos \frac{2\pi j v}{n}) \\ X_q^i(v) &= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^q \lambda_{ij} \sin \frac{2\pi j v}{n} \\ Y_q^i(v) &= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^q \beta_{ij} \sin \frac{2\pi j v}{n} \\ Z_q^i(v) &= \frac{1}{n} (\gamma_{i0} + 2 \sum_{j=1}^q \gamma_{ij} \cos \frac{2\pi j v}{n}) \end{aligned} \right. \quad (80)$$

Dans ce paragraphe, nous avons toujours limité notre étude au cas où m et n sont impairs et où $O(x, y)$ appartient à $\mathcal{C}_{\frac{m-1}{2}, \frac{n-1}{2}}$.

Nous allons maintenant considérer le cas où m et (ou) n sont pairs et où $O(x, y)$ est une fonction quelconque n'appartenant pas nécessairement à un certain ensemble $\mathcal{C}_{p, q}$.

Comme dans le cas d'une variable présenté au paragraphe 1112, on montrera que :

$$\begin{aligned}
O_{pq}(x, y) = & e_{00} + \sum_{i=1}^p (e_{i0} \cos i\omega_1 x + f_{i0} \sin i\omega_1 x) \\
& + \sum_{j=1}^q (e_{0j} \cos j\omega_2 y + f_{0j} \sin j\omega_2 y) \\
& + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (e_{ij} \cos i\omega_1 x \cos j\omega_2 y + f_{ij} \cos i\omega_1 x \sin j\omega_2 y \\
& + g_{ij} \sin i\omega_1 x \cos j\omega_2 y + h_{ij} \sin i\omega_1 x \sin j\omega_2 y)
\end{aligned}$$

où les coefficients e_{ij} , f_{ij} , g_{ij} et h_{ij} sont ceux définis par les relations (60), est, dans $\mathcal{C}_{pq}$, la meilleure approximation au sens des moindres carrés de $O(x, y)$ sous les conditions, toutefois, que $2p+1 \leq m$ et $2q+1 \leq n$.

Ceci implique donc que $A_{pq}(x, y)$ a la même expression que celle obtenue dans le cas où m et n sont impairs et, par conséquent, le théorème 19 reste encore valable.

Soient p^* et q^* les valeurs maximales admises respectives de p et de q ⁽¹⁾.

On peut noter que si $O(x, y) \in \mathcal{C}_{p^*, q^*}$, alors on a à fortiori $O_{p^*, q^*}(x, y) \equiv O(x, y)$, ce qui implique évidemment que

$A_{p^*, q^*}(x, y) \equiv A(x, y)$ et que $A_{pq}(x, y)$ est la meilleure approximation au sens des moindres carrés de $A(x, y)$ dans $\mathcal{C}_{pq}$.

Mais, dans le cas où $O(x, y)$ est une fonction quelconque n'appartenant pas nécessairement à $\mathcal{C}_{p^*, q^*}$, $A_{p, q}(x, y)$ n'est pas en général la meilleure approximation au sens des moindres carrés de $A(x, y)$, mais une fonction qui lui est voisine.

⁽¹⁾ Suivant que m (respectivement n) est pair ou impair, p^* (resp. q^*) est égal soit à $\frac{m}{2} - 1$ (resp. $\frac{n}{2} - 1$), soit à $\frac{m-1}{2}$ (resp. $\frac{n-1}{2}$). Dans le cas où m et (ou) n sont pairs, $O_{p^*, q^*}(x, y)$ n'est pas, en général, un polynôme d'interpolation de $O(x, y)$ sur le support S .

On voit alors que le théorème 17 apparaît comme un cas particulier du théorème 19 où m et n sont impairs et $p = p^*$ et $q = q^*$.

Nous allons étudier, dans le paragraphe ci-dessous, le cas particulier où $R(u, v)$ est égale au produit de deux fonctions d'une seule variables $R_1(u)$ et $R_2(v)$, dans lequel, les calculs deviennent particulièrement simples.

1213 - CAS OU $R(u, v)$ EST UN PRODUIT TENSORIEL DE DEUX FONCTIONS.

Dans certain type de problèmes, en particulier celui que nous traiterons dans la chapitre II, $R(u, v)$ est une fonction de la forme :

$$R(u, v) = R_1(u) \cdot R_2(v) \quad (81)$$

où $R_1(u)$ et $R_2(v)$ sont des fonctions d'une seule variable. On dit alors que R est le produit tensoriel de R_1 et R_2 et on note comme pour les matrices (réf. 43) :

$$R = R_1 \otimes R_2$$

Dans ce cas, il est évident que l'équation de convolution (42) peut se mettre sous la forme :

$$\int_{\mathbb{R}} A(u, v) R_1(x-u) du = H(x, v) \quad (82)$$

où $H(x, v)$ est une solution de l'équation :

$$\int_{\mathbb{R}} H(x, v) R_2(y-v) dv = O(x, y) \quad (83)$$

La résolution d'un problème à deux variables, dans le cas où R est un produit tensoriel de deux fonctions, se ramène donc à celle de deux problèmes à une variable.

Posons :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \eta_i &= \int_{\mathbb{R}} R_1(u) \cos i\omega_1 u \, du \quad 0 \leq i \leq r \\ \theta_i &= \int_{\mathbb{R}} R_1(u) \sin i\omega_1 u \, du \quad 1 \leq i \leq r \\ \nu_j &= \int_{\mathbb{R}} R_2(v) \cos j\omega_2 v \, dv \quad 0 \leq j \leq s \\ \chi_j &= \int_{\mathbb{R}} R_2(v) \sin j\omega_2 v \, dv \quad 1 \leq j \leq s \end{array} \right. \quad (84)$$

On vérifie alors aisément que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_{ij} &= \eta_i \nu_j \\ \xi_{ij} &= \eta_i \chi_j \\ \zeta_{ij} &= \theta_i \nu_j \\ \mu_{ij} &= \theta_i \chi_j \\ \Delta_{ij} &= (\eta_i^2 + \theta_i^2)^2 \cdot (\nu_j^2 + \chi_j^2)^2 \\ \alpha_{ij} &= \eta_i \nu_j / \sqrt{\Delta_{ij}} \\ \beta_{ij} &= \eta_i \chi_j / \sqrt{\Delta_{ij}} \\ \gamma_{ij} &= \theta_i \nu_j / \sqrt{\Delta_{ij}} \\ \lambda_{ij} &= \theta_i \chi_j / \sqrt{\Delta_{ij}} \end{array} \right. \quad (85)$$

Théorème 20. On a :

$$R_{pq} = \Phi_q^2 \cdot \Theta \cdot \Phi_p^{lt} \quad (86)$$

où Φ_p^1 et Φ_q^2 sont deux matrices carrées de dimensions respectives m et n et dont les éléments respectifs φ_{ij}^1 et φ_{ij}^2 situés sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne sont définis par :

$$\begin{cases} \varphi_{ij}^1 &= U_p^1(j-i) + Z_p^1(j-i) & 1 \leq i, j \leq m \\ \varphi_{ij}^2 &= U_q^2(j-i) + Z_q^2(j-i) & 1 \leq i, j \leq n \end{cases} \quad (87)$$

dans lesquelles $U_p^1(t)$, $Z_p^1(t)$, $U_q^2(t)$ et $Z_q^2(t)$ sont des fonctions définies par :

$$\begin{cases} U_p^1(t) &= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{\eta_0} + 2 \sum_{k=1}^p \frac{\eta_k}{\eta_k^2 + \theta_k^2} \cos \frac{2\pi kt}{m} \right) \\ Z_p^1(t) &= \frac{2}{m} \sum_{k=1}^p \frac{\theta_k}{\eta_k^2 + \theta_k^2} \sin \frac{2\pi kt}{m} \\ U_q^2(t) &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\nu_0} + 2 \sum_{k=1}^q \frac{\nu_k}{\nu_k^2 + \chi_k^2} \cos \frac{2\pi kt}{n} \right) \\ Z_q^2(t) &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^q \frac{\chi_k}{\nu_k^2 + \chi_k^2} \sin \frac{2\pi kt}{n} \end{cases} \quad (88)$$

Démonstration.

En effet, remplaçons dans la formule (78), les coefficients α_{ij} , λ_{ij} , β_{ij} et γ_{ij} par leurs valeurs respectives données par les relations (85). Nous obtenons alors après séparation des termes en x et en y :

$$\begin{aligned} \varphi_{k\ell, \tau t}^{pq} &= \frac{1}{m} \left[\frac{1}{\eta_0} + 2 \sum_{i=1}^p \frac{\eta_i}{\eta_i^2 + \theta_i^2} \cos \frac{2\pi i(\tau-k)}{m} \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^p \frac{\theta_i}{\eta_i^2 + \theta_i^2} \sin \frac{2\pi i(\tau-k)}{m} \right] \\ &\quad \times \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\nu_0} + 2 \sum_{j=1}^q \frac{\nu_j}{\nu_j^2 + \chi_j^2} \cos \frac{2\pi j(t-\ell)}{n} + 2 \sum_{j=1}^q \frac{\chi_j}{\nu_j^2 + \chi_j^2} \sin \frac{2\pi j(t-\ell)}{n} \right] \\ &= \varphi_{k\tau}^1 \cdot \varphi_{\ell t}^2 \end{aligned}$$

Comme cette dernière relation est satisfaite pour tous k , ℓ et t , on a donc :

$$\Phi_{pq} = \Phi_p^1 \otimes \Phi_q^2$$

D'où en vertu du théorème 19 :

$$\Pi_{pq}^c = (\Phi_p^1 \otimes \Phi_q^2) \cdot \Theta^c \quad (89)$$

La démonstration est alors terminée puisque d'après la propriété (65), on a :

$$(89) \iff \Pi_{pq} = \Phi_q^2 \cdot \Theta \cdot \Phi_p^{lt}$$

On notera que les matrices Φ_p^1 et Φ_q^2 ont strictement la même configuration que la matrice Φ_p introduite dans le théorème 6.

Il est clair que tous les résultats établis dans ce paragraphe restent encore valables pour m et (ou) n pairs. On peut, d'ailleurs, les obtenir en résolvant directement les équations (82) et (83) à l'aide de la technique décrite dans le cas à une variable.

La formule (89) n'est pas sous une forme prête à la programmation. Il est plus avantageux d'utiliser la formule (86) en l'écrivant sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} H = \Phi_q^2 \cdot \Theta \\ \Pi_{pq} = H \cdot \Phi_p^{lt} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (90) \\ (91) \end{array}$$

On remarque donc que l'hypothèse $R = R_1 \otimes R_2$ a permis de séparer les variables x et y et d'obtenir, enfin, des formules de calculs considérablement plus simples que ceux des théorèmes 17 et 19.

Interprétation des relations (86), (90) et (91).

Dans la relation (90), H est la matrice des valeurs d'une solution de l'équation (83) sur le support S , sa $i^{\text{ème}}$ colonne correspond à la valeur de x fixée égale à x_i .

La relation (91) s'interprète comme une résolution de l'équation (82) en y fixant successivement v égal à $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Le calcul de Π_{pq} à partir des relations (90) et (91) revient donc à résoudre l'équation (42), d'abord colonne par colonne (en y , x étant fixé égal successivement à $x_1, x_2, \dots, x_m$) puis ligne par ligne (en x , y étant fixé égal successivement à $y_1, y_2, \dots, y_n$).

On pourrait, d'ailleurs, permuter l'ordre des opérations, ce qui revient à écrire la formule (86) sous la forme :

$$\Pi_{pq} = \Phi_q^2 \cdot (\otimes \cdot \Phi_p^{lt})$$

c'est-à-dire à résoudre l'équation considérée d'abord ligne par ligne puis colonne par colonne.

122 - CAS PARTICULIER OU $R(u, v)$ EST PAIRE

Nous allons, à présent, étudier le cas particulier où $R(u, v)$ est une fonction paire par rapport à chacune des variables u et v , c'est-à-dire telle que :

$$R(u, v) = R(-u, v) = R(u, -v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R} \quad (92)$$

Nous verrons que cette dernière hypothèse satisfaite lorsque $R(u, v)$ est une fonction gaussienne centrée (à l'origine) allège considérablement les calculs.

Une première conséquence évidente de la condition (92) est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{ij} = \zeta_{ji} = \mu_{jk} = 0 \quad \forall i \geq 0 \text{ et } j, k \geq 1 \end{array} \right. \quad (93)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{ij} = \text{TF}(R) \left(\frac{i}{T_1}, \frac{j}{T_2} \right) \quad \forall i, j \geq 0 \end{array} \right. \quad (94)$$

Le théorème 14 devient alors :

Théorème 21. Les coefficients des polynômes $A_{pq}(x, y)$ et $O_{pq}(x, y)$ sont liés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{ij} = \rho_{ij} a_{ij} \\ f_{ij} = \rho_{ij} b_{ij} \\ g_{ij} = \rho_{ij} c_{ij} \\ h_{ij} = \rho_{ij} d_{ij} \end{array} \right. \quad (95)$$

L'hypothèse complémentaire sur les coefficients ρ_{ij} , ξ_{ij} , ζ_{ij} et μ_{ij} est donc réduite à :

$$\rho_{ij} \neq 0 \quad \forall i, j \geq 0$$

Ces simplifications importantes apparaissent également dans les théorèmes (16) et (19). On a alors :

Théorème 22. Si

$$\begin{aligned} O(x, y) = e_{00} + \sum_{i=1}^r (e_{i0} \cos i\omega_1 x + f_{i0} \sin i\omega_1 x) \\ + \sum_{j=1}^s (e_{0j} \cos j\omega_2 y + f_{0j} \sin j\omega_2 y) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (e_{ij} \cos i\omega_1 x \cdot \cos j\omega_2 y + f_{ij} \cos i\omega_1 x \cdot \sin j\omega_2 y \\ + g_{ij} \sin i\omega_1 x \cos j\omega_2 y + h_{ij} \sin i\omega_1 x \sin j\omega_2 y)$$

alors l'équation (42) admet pour l'unique solution (stricte) :

$$A(x, y) = \frac{e_{00}}{\rho_{00}} + \sum_{i=1}^r \frac{1}{\rho_{i0}} (e_{i0} \cos i\omega_1 x + f_{i0} \sin i\omega_1 x) + \sum_{j=1}^s \frac{1}{\rho_{0j}} (e_{0j} \cos j\omega_2 y + \\ f_{0j} \sin j\omega_2 y) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{1}{\rho_{ij}} (e_{ij} \cos i\omega_1 x \cos j\omega_2 y + f_{ij} \cos i\omega_1 x \sin j\omega_2 y \\ + g_{ij} \sin i\omega_1 x \cos j\omega_2 y + h_{ij} \sin i\omega_1 x \sin j\omega_2 y)$$

Théorème 23. ⁽¹⁾ On a :

$$H_{pq}^c = \Phi_{pq} \cdot \Theta^c \quad (96)$$

où Φ_{pq} est une matrice carrée symétrique de dimension mn dont l'élément $\Phi_{k\ell, \tau t}^{pq}$ situé au croisement de la $(kn + \ell)$ ^{ème} ligne et $(\tau n + t)$ ^{ème} colonne est défini par :

$$\Phi_{k\ell, \tau t}^{pq} = W_{pq}(\tau - k, t - \ell) \quad 1 \leq k, \tau \leq m, 1 \leq t, \ell \leq n \quad (97)$$

dans laquelle $W_{pq}(u, v)$ est une fonction définie par :

$$W_{pq}(u, v) = \frac{1}{m} (V_q^0(v) + 2 \sum_{i=1}^p V_q^i(v) \cos \frac{2\pi i u}{m}) \quad (98)$$

$V_q^0(v), V_q^1(v), \dots, V_q^p(v)$ étant elle-même une famille de fonctions définies par :

$$V_q^i(v) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\rho_{i0}} + 2 \sum_{j=1}^q \frac{1}{\rho_{ij}} \cos \frac{2\pi j v}{n} \right) \quad (99)$$

⁽¹⁾ Rappelons que ce théorème reste encore valable quand m et (ou) n sont pairs sous les seules conditions que $2p+1 \leq m$ et $2q+1 \leq n$.

Démonstration.

En effet, on a en vertu de la relation (93) :

$$\begin{cases} \alpha_{ij} = \rho_{ij}^{-1} & \forall i, j \geq 0 \\ \beta_{ij} = \gamma_{ji} = \lambda_{jk} & \forall i \geq 0 \text{ et } j, k \geq 1 \end{cases}$$

D'où, on déduit :

$$X_q^i(v) \equiv Y_q^j(v) \equiv Z_q^i(v) \equiv 0 \quad \forall i \geq 1, j \geq 0$$

Ceci implique alors :

$$\begin{cases} W_{pq}(u, v) \equiv W_{pq}^1(u, v) \\ W_{pq}^i(u, v) \equiv 0 \end{cases} \quad i = 2, 3, 4$$

D'autre part, on a pour tous k, ℓ, τ et t :

$$\varphi_{k\ell, \tau t}^{pq} = W_{pq}(\tau - k, t - \ell) = W_{pq}(k - \tau, \ell - t) = \varphi_{\tau t, k\ell}^{pq}$$

la matrice Φ_{pq} est donc symétrique. Ceci achève la démonstration.

La relation (97) montre que la matrice Φ_{pq} est définie par les $(2m-1)(2n-1)$ valeurs $W_{pq}(u, v)$ pour $u = -(m-1), \dots, 0, \dots, m-1$ et $v = -(n-1), \dots, 0, \dots, n-1$. Mais en tenant compte de la périodicité et de la parité de la fonction $W_{pq}(u, v)$ par rapport à chacune des deux variables u et v on remarque que, pour connaître toutes les valeurs ci-dessus, il suffit de calculer seulement les $(m_1+1)(n_1+1)$ valeurs $W_{pq}(u, v)$ pour $u = 0, 1, \dots, m_1$ et $v = 0, 1, \dots, n_1$; m_1 et n_1 étant les parties entières respectives de $m/2$ et $n/2$.

Le calcul de chaque valeur $A_{pq}(x_k, y_\ell)$ demande mn multiplications. Cependant, en groupant ensemble, dans la formule :

$$A_{pq}(x_k, y_\ell) = \sum_{\tau=1}^m \sum_{t=1}^n W_{pq}(|\tau-k|, |t-\ell|). O(x_\tau, y_t) \quad (100)$$

les termes en $W_{pq}(u, v)$ pour $u = 0, 1, \dots, m_1$ et $v = 0, 1, \dots, n_1$, on réduit ce nombre de multiplications à $m_1 n_1$ environs.

Nous verrons, dans le paragraphe qui suit, que ce calcul sera encore considérablement allégé si $R(u, v)$ est, non seulement paire par rapport à chacune des variables u et v mais est, de plus, le produit tensoriel de deux fonctions $R_1(u)$ et $R_2(v)$. Il est clair que la parité de $R(u, v)$ implique nécessairement celle de $R_1(u)$ et $R_2(v)$.

CAS OU $R(u, v)$ EST UN PRODUIT TENSORIEL DE DEUX FONCTIONS.

Théorème 24. On a :

$$\Pi_{pq} = \Psi_q^2 \cdot \otimes \cdot \Psi_p^1 \quad (101)$$

où Ψ_p^1 et Ψ_q^2 sont deux matrices carrées symétriques de dimensions respectives m et n dont les éléments ψ_{ij}^1 et ψ_{ij}^2 situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne sont définis par :

$$\begin{cases} \psi_{ij}^1 = X_p^1(|i-j|) & 1 \leq i, j \leq m \\ \psi_{ij}^2 = X_q^2(|i-j|) & 1 \leq i, j \leq n \end{cases} \quad (102)$$

dans lesquelles $X_p^1(t)$ et $X_q^2(t)$ sont des fonctions définies par :

$$\begin{cases} X_p^1(t) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{\eta_0} + 2 \sum_{k=1}^p \frac{1}{\eta_k} \cos \frac{2\pi kt}{m} \right) \\ X_q^2(t) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{v_0} + 2 \sum_{k=1}^q \frac{1}{v_k} \cos \frac{2\pi kt}{n} \right) \end{cases}$$

Démonstration.

En effet, de la relation :

$$\rho_{ij} = \eta_i v_j \quad \forall i, j \geq 0$$

on vérifie aisément que, pour tous k, ℓ, τ et t :

$$W_{pq}(|\tau-k|, |t-\ell|) = X_p^1(|\tau-k|) \cdot X_q^2(|t-\ell|)$$

d'où :

$$W_{pq} = \Psi_p^1 \otimes \Psi_q^2$$

(Il est évident que Ψ_p^1 et Ψ_q^2 sont, d'après leurs définitions, des matrices carrées symétriques).

On a donc en vertu du théorème 23 :

$$\mathbb{H}_{pq}^c = (\Psi_p^1 \otimes \Psi_q^2) \cdot \Theta^c \quad (103)$$

Mais on a, d'après la propriété (65) du produit tensoriel de deux matrices :

$$(103) \iff \mathbb{H}_{pq} = \Psi_q^2 \cdot \Theta \cdot \Psi_p^{1t}$$

Ceci démontre notre affirmation puisque Ψ_p^1 est une matrice symétrique.

On note alors que les deux matrices Ψ_p^1 et Ψ_q^2 ont strictement la même configuration que la matrice Ψ_p introduite dans le théorème 9.

On remarque, en outre, que le calcul de

$$H = \Psi_q^2 \cdot \Theta$$

et celui de :

$$\mathbb{H}_{pq} = H \cdot \Psi_p^1$$

demande environ respectivement $mn^2/2$ et $m^2n/2$ multiplications. Le calcul de $\mathbb{H}_{pq}$ demande donc, dans ce cas, au total environ $mn(n+m)/2$ multiplications.

2. Applications numériques

Le but essentiel de notre étude est de résoudre le problème de correction de résolution des scintigraphies numériques (cf. chapitre II). Comme beaucoup d'auteurs, nous étudions le cas où R est une fonction gaussienne centrée (à l'origine) et normalisée et où O est une fonction échantillonnée définie par ses valeurs numériques sur un support régulier séparable S (cf. paragraphe 1212).

D'autre part, pour tester la méthode, il est préférable de n'envisager que des exemples dont nous connaissons la solution stricte.

21 - CONSTRUCTION DES EXEMPLES A TRAITER.

CAS D'UNE VARIABLE.

Nous définissons la fonction $R(u)$ par :

$$R(u) = \sqrt{\frac{c}{\pi}} e^{-cu^2} \quad (104)$$

où $c = 2,8/(K\Delta x)^2$ est choisi pour que $R(\frac{K\Delta x}{2}) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{\pi}}$, Δx étant l'écart T/n entre deux points consécutifs du support. On note que $R(u)$ ainsi définie est une fonction paire.

Dans cette définition, K est un paramètre caractérisant l'importance de l'effet de résolution. La largeur à mi-hauteur ($L M H$) de $R(u)$ est égale à $K\Delta x$ (voir figure 1). Le paramètre de résolution K dépend

donc non seulement du collimateur utilisé, mais aussi de la dimension des "mailles" choisies.

On démontre alors que (réf. 43) :

$$\rho_j = e^{-\frac{1}{c} \left(\frac{j\pi}{T} \right)^2} = e^{-\frac{1}{2,8} \left(\frac{Kj\pi}{n} \right)^2} \quad j \in \mathbb{N} \quad (105)$$

On remarque donc que les coefficients ρ_j ne dépendent pas de T , mais uniquement de K et de n . Ils sont, en outre, tous strictement positifs (cf. figure 2).

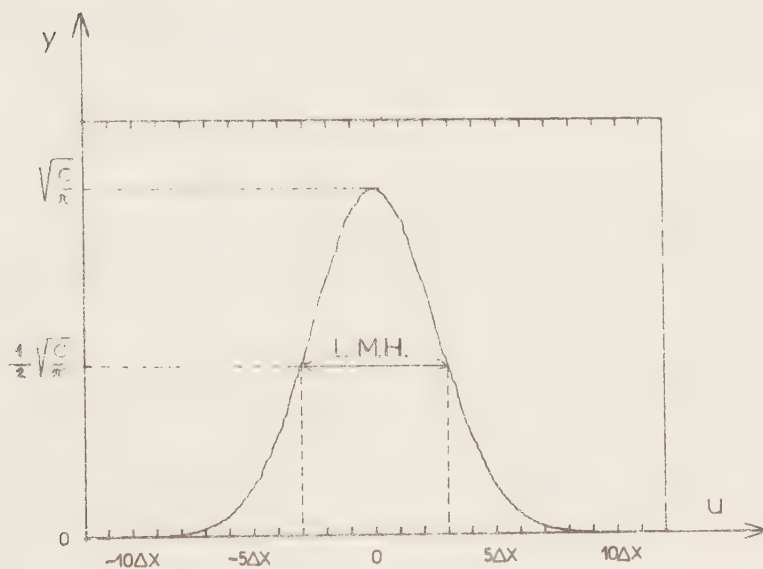


Figure 1 - Graphe de $R(u)$ pour $K = 6$.

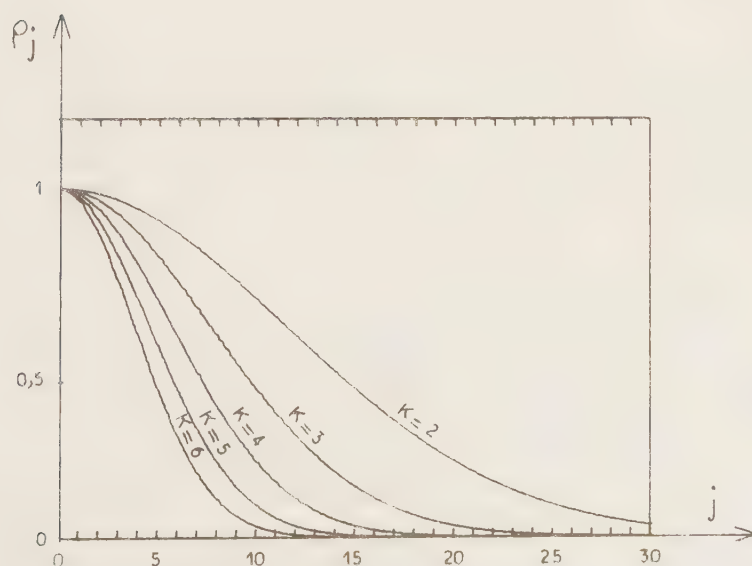


Figure 2 - Graphes de $\rho_j = TF(R)\left(\frac{j}{2\pi}\right)$ pour $K = 2, 3, 4, 5$ et 6

Soit $A(x)$ une fonction échantillonnée définie sur le support :

$$x_j = \frac{j-1}{n} T \qquad j = 1, 2, \dots, n \qquad (106)$$

Notre but est de construire, à partir de la fonction donnée $A(x)$, une fonction échantillonnée $O(x)$ définie sur le même support et qui est telle que :

$$L(A) = O \qquad (107)$$

Comme la méthode proposée conduit, dans le cas où n est impair et où $O(x)$ est un polynôme trigonométrique de degré m (m étant égal à $(n-1)/2$), à la solution stricte, nous faisons alors l'hypothèse que n est impair et que ces fonctions $A(x)$ et $O(x)$ sont, de plus, identiques à leurs polynômes d'interpolation sur le support considéré.

Posons :

$$R = \begin{bmatrix} A(x_1) \\ A(x_2) \\ \vdots \\ A(x_n) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Theta = \begin{bmatrix} O(x_1) \\ O(x_2) \\ \vdots \\ O(x_n) \end{bmatrix}$$

On démontre alors d'une façon analogue à celle du théorème 4 :

Théorème 25. On a :

$$\Theta = \Lambda . R$$

où Λ est une matrice carrée symétrique d'ordre n dont l'élément λ_{ij} situé au croisement de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est défini par :

$$\lambda_{ij} = W(|i-j|) \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

$W(t)$ étant une fonction auxiliaire définie par :

$$W(t) = \frac{1}{n} \left(\rho_0 + 2 \sum_{k=1}^m \rho_k \cos \frac{2\pi kt}{n} \right)$$

On note alors que l'expression de $W(t)$ peut être obtenue à partir de celle de $X_m(t)$ introduite dans le théorème 9 en y remplaçant les coefficients ρ_k par leurs inverses respectifs. La matrice $\mathcal{L}$ a donc la même configuration que celle de Ψ_m .

De plus, des relations (cf. théorèmes 9 et 25) :

$$\begin{cases} \Theta &= \mathcal{L} \cdot \mathbf{R} \\ \mathbf{R} &= \Psi_m \cdot \Theta \end{cases} \quad (108)$$

$$(109)$$

on déduit immédiatement :

$$\Psi_m^{-1} = \mathcal{L}^{-1}$$

On voit donc que la méthode développée revient simplement à approcher l'équation intégrale (107) par le système linéaire discrétisé (108) et à résoudre enfin ce système.

Le plus grand intérêt de cette méthode est que, d'une part, nous sachions expliciter les expressions mathématiques des éléments de la matrice inverse Ψ_m et que, d'autre part, le calcul des valeurs numériques de ceux-ci est très simple.

De plus, la substitution de $\mathbf{R}$ par (cf. théorème 9) :

$$\mathbf{R}_p = \Psi_p \cdot \Theta \quad p \leq m$$

(c'est-à-dire la troncature de $A(x)$ à l'ordre p) revient à calculer une approche de $A(x)$ au sens des moindres carrés sur le support $x_1, x_2, \dots, x_n$ ⁽¹⁾.

CAS DE DEUX VARIABLES.

La fonction $R(u, v)$ est définie par :

⁽¹⁾ Si n est pair, $A(x)$ n'est pas la meilleure approximation au sens des moindres carrés de $A(x)$, mais une fonction qui lui est voisine (cf. paragraphe 1112).

$$R(u, v) = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{\pi}} e^{-(c_1 u^2 + c_2 v^2)}$$

égale au produit tensoriel des deux fonctions paires :

$$\begin{cases} R_1(u) &= \frac{\sqrt{c_1}}{\pi} e^{-c_1 u^2} \\ R_2(v) &= \frac{\sqrt{c_2}}{\pi} e^{-c_2 v^2} \end{cases}$$

où $c_1 = 2,8/(K_1 \Delta x)^2$ et $c_2 = 2,8/(K_2 \Delta y)^2$ sont déterminés de sorte que $R_1(\frac{K_1 \Delta x}{2}) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c_1}{\pi}}$ et $R_2(\frac{K_2 \Delta y}{2}) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c_2}{\pi}}$. Dans ces deux relations Δx et Δy représentent les écarts T_1/m et T_2/n entre deux points consécutifs des suites respectives $x_1, x_2, \dots, x_m$ et $y_1, y_2, \dots, y_n$ (m et n étant supposés impairs et égaux respectivement à $2r+1$ et $2s+1$) et K_1 et K_2 sont les paramètres du collimateur.

Dans ces conditions, on a :

$$\begin{cases} \eta_j &= e^{-\frac{1}{2,8} (\frac{K_1 j \pi}{m})^2} \\ v_j &= e^{-\frac{1}{2,8} (\frac{K_2 j \pi}{n})^2} \\ \rho_{ij} &= \eta_i v_j \end{cases} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

On démontre alors d'une façon semblable à celle du théorème 24 :

Théorème 26. On a ⁽¹⁾ :

$$\Theta = \Gamma_2 \cdot \mathbf{A} \cdot \Gamma_1 \tag{110}$$

⁽¹⁾ Les matrices $\mathbf{A}$ et Θ sont définies dans le paragraphe 1212. Elles sont les matrices des valeurs de $A(x, y)$ et de $O(x, y)$ sur le support S .

où Γ_1 et Γ_2 sont deux matrices carrées symétriques de dimensions respectives m et n dont les éléments γ_{ij}^1 et γ_{ij}^2 situés sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne sont définis par :

$$\begin{cases} \gamma_{ij}^1 &= Z^1(|i-j|) & 1 \leq i, j \leq m \\ \gamma_{ij}^2 &= Z^2(|i-j|) & 1 \leq i, j \leq n \end{cases}$$

dans lesquelles, $Z^1(t)$ et $Z^2(t)$ sont des fonctions définies par :

$$\begin{cases} Z^1(t) &= \frac{1}{m} (\eta_0 + 2 \sum_{k=1}^r \eta_k \cos \frac{2\pi kt}{m}) \\ Z^2(t) &= \frac{1}{n} (\nu_0 + 2 \sum_{k=1}^s \nu_k \cos \frac{2\pi kt}{n}) \end{cases}$$

Comme dans le cas d'une variable, on remarque que les fonctions $Z^1(t)$ et $Z^2(t)$ peuvent s'obtenir à partir des fonctions $X_r^1(t)$ et $X_s^2(t)$ du théorème 24 en remplaçant, dans leurs expressions, les coefficients η_i et ν_j par leurs inverses respectifs et que, de plus, les matrices Γ_1 et Γ_2 ont strictement la même structure que les matrices Ψ_p^1 et Ψ_q^2 introduites dans le même théorème 24.

Rappelons que, dans ce cas où R est égale au produit tensoriel de R_1 et R_2 , on peut écrire l'équation (42) sous la forme :

$$\int_{\mathbb{R}} A(u, v) R_1(x-u) du = H(x, v) \quad (111)$$

où $H(x, v)$ est une solution de l'équation :

$$\int_{\mathbb{R}} H(x, v) R_2(y-v) dv = O(x, y) \quad (112)$$

La relation (111) peut encore s'écrire :

$$\begin{cases} H &= \Pi \cdot \Gamma_1 \end{cases} \quad (113)$$

$$\begin{cases} O &= \Gamma_2 \cdot H \end{cases} \quad (114)$$

Transposons l'équation (113), nous obtenons alors puisque T_1 est symétrique :

$$H^t = T_1 \cdot A^t \quad (115)$$

Les relations (115) et (114) forment respectivement des ensembles de n systèmes linéaires de m équations à m inconnues, et de m systèmes linéaires de n équations à n inconnues obtenus en discrétisant respectivement les équations (111) et (112).

Il est clair, d'après le théorème 24 et les relations (113) et (114) que :

$$\begin{aligned} \Psi_r^1 &= \Gamma_1^{-1} \\ \Psi_s^2 &= \Gamma_2^{-1} \end{aligned}$$

On voit donc, dans ce cas particulier, que la méthode proposée revient simplement à expliciter les éléments des matrices Ψ_r^1 et Ψ_s^2 .

Notons, cependant, que dans le cas général où R n'est pas produit tensoriel de deux fonctions, la discrétisation de l'équation (42) conduit au système linéaire de mn équations à mn inconnues :

$$\Theta^c = \Gamma \cdot A^c$$

où Γ est l'inverse de la matrice Φ du théorème 17.

22 - RESULTATS.

Tous les résultats que nous présenterons ont été obtenus avec $T=2\pi$ et $n = 61$, en choisissant comme solution stricte $A(x)$, une fonction utilisée par Iinuma et Nagai dans la référence 22 et représentée dans la figure 3 (page 70).

Désignons par $A_p^c(x)$ le polynôme trigonométrique de degré

$p \leq m$ calculé par la méthode proposée. On notera qu'il contient $2p+1$ termes.

Nous présentons, dans le tableau 1, la valeur de :

$$e_p = \max_{1 \leq i \leq n} |A(x_i) - A_p^c(x_i)|$$

pour diverses valeurs de K ⁽¹⁾ et pour $p = m$.

Ce tableau nous montre que si on dispose d'assez de chiffres significatifs de sorte que les erreurs de chute soient négligeables, on peut trouver $A_m^c(x)$ pratiquement égale à $A(x)$. C'est ainsi que, pour $K = 2$ et 3 , la simple précision donne des résultats satisfaisants ($e_m = 3.10^{-5}$ et 2.10^{-3}), mais pour $K = 4, 5$ et 6 , ceux-ci deviennent aberrants et il faudra alors utiliser la double précision.

Note. (sur les détails de programmation).

Dans le cas où seules les erreurs de chute interviennent, il serait important, pour réduire l'influence de celles-ci, de calculer séparément les valeurs des cosinus au lieu d'utiliser les formules de récurrence ; et de calculer les valeurs des fonctions $W(t)$ et $X_m(t)$ (cf. théorèmes 9 et 25) en sommant les termes dans l'ordre croissant de leurs valeurs absolues. On gagne ainsi 2 à 3 chiffres significatifs.

Tableau 1. Valeur de e_m

Précision \ K	2	3	4	5	6
simple	3.10^{-5}	2.10^{-3}	0,6	10^3	10^7
double	3.10^{-14}	10^{-12}	5.10^{-10}	10^{-6}	10^{-2}

⁽¹⁾ Dans les problèmes pratiques, on a en général $\frac{n}{30} \leq K \leq \frac{n}{10}$, ce qui conduit, pour $n = 61$, à $2 \leq K \leq 6$.

Dans le cas pratique où les valeurs $O(x_i)$ sont entachées d'une erreur de mesure plus importante que celle d'arrondi, on se rend compte qu'il sera important de s'intéresser aux polynômes tronqués. Il y a alors, d'une part, réduction de l'influence de celle-ci, mais d'autre part, augmentation de l'erreur de méthode (due à cette troncature des derniers termes de $A_m^c(x)$). Il existe donc une approche optimale (choix de p optimum) qui correspond, par exemple, à la valeur de p minimisant e_p . Les résultats établis avec les calculs en simple précision dans le cas où l'erreur de mesure est nulle et présentés dans le tableau 2, montrent, sur cet exemple particulier, que les valeurs optimales de p pour K égal à 4, 5 et 6 sont égales approximativement aux valeurs respectives 24, 20 et 16. Pour $K = 2$ et 3, la valeur optimale de p est celle qui correspond à l'interpolation ($p = 30$).

Il faut noter, cependant, que dans les problèmes pratiques où la solution stricte $A(x)$ est inconnue, cette valeur optimale de p sera aussi inconnue. On sera alors amené à donner à p une valeur arbitraire, fixée à priori.

Tableau 2 . Valeur de e_p (simple précision)

$p \backslash K$	2	3	4	5	6
12	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09
16	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06
20	0,03	0,03	0,03	0,04	0,07
24	0,02	0,02	0,02	0,04	183
28	0,003	0,003	0,08	62	$2 \cdot 10^{+5}$

Le tableau 3 présente les valeurs de certains coefficients de $A(x)$ et de $A_m^c(x)$ calculés en simple précision avec $K = 2$. On voit, dans ce tableau, que l'erreur sur ces coefficients porte sur le cinquième

chiffre significatif. Ceci met en évidence l'influence de l'erreur d'ar-
rondi sur chaque coefficient et la réduction de celle-ci lorsqu'on tron-
que les derniers termes de $A_m^c(x)$.

Cette troncature amène nécessairement une perte d'informat
d'autant plus importante que p sera plus petit. Dans les cas extrêmes
lorsque p devient petit, la fonction tronquée $A_p^c(x)$ peut s'écarter cons-
déablement de A(x) et ne plus avoir, par conséquent, de significations

Tableau 3 - Quelques coefficients de A(x) et $A_m^c(x)$
(simple précision, K = 2)

k	10 ⁶ × coefficient du terme en cos k x		10 ⁶ × coefficient du terme en sin k x	
	A(x)	$A_m^c(x)$	A(x)	$A_m^c(x)$
0	473064	473047		
5	63383	63381	-3966	-3966
10	-4362	-4362	23733	23732
15	-6995	-6995	4759	4759
20	12872	12872	780	780
25	45	45	2783	2783
30	2462	2462	2152	2152

On note, toutefois, que dans les problèmes concrets, la fonction
A(x) peut être, en général, approchée valablement par un polynôme de
degré assez faible. Nous allons illustrer ceci par les résultats ci- des
sous.

Nous présentons, dans la figure 3, la solution stricte A(x), la
fonction O(x) second membre de l'équation considérée (calculée par la

technique décrite au paragraphe 21) et la solution approchée tronquée au degré 10, $A_{10}^c(x)$ calculée en simple précision. Dans cet exemple, nous fixons $K = 6$, valeur avec laquelle la fonction $R(u)$ produit pratiquement le même effet de collimation que celle utilisée par Iinuma et Nagai dans l'article cité. Cette figure nous montre que $A_{10}^c(x)$ constitue une approche assez satisfaisante de $A(x)$, bien que celle-ci a une forme assez délicate.

La figure 4 présente, sur le même exemple, le résultat obtenu en tronquant $A_m^c(x)$ au degré 13, au lieu de 10. En comparant $A_{10}^c(x)$ et $A_{13}^c(x)$, on remarque que $A_{13}^c(x)$ est une approche un peu meilleure que $A_{10}^c(x)$, mais le passage de degré 10 au degré 13 n'a pas modifié sérieusement l'allure de $A_{10}^c(x)$.

Nous ne présentons pas ici les résultats dans le cas à deux variables car les essais effectués nous ont conduits aux résultats tout à fait semblables.

On peut noter, enfin, que la méthode développée est une méthode très rapide : dans le cas de deux variables, les temps de calcul (en simple précision sur CII - 10070) pour une matrice 37×37 et 65×65 sont respectivement 0,03 et 0,20 minute.



Figure 3 - Graphes de :

- $A(x)$
- $O(x)$
- $A_{10}^c(x)$ (Ce polynôme contient 21 termes)

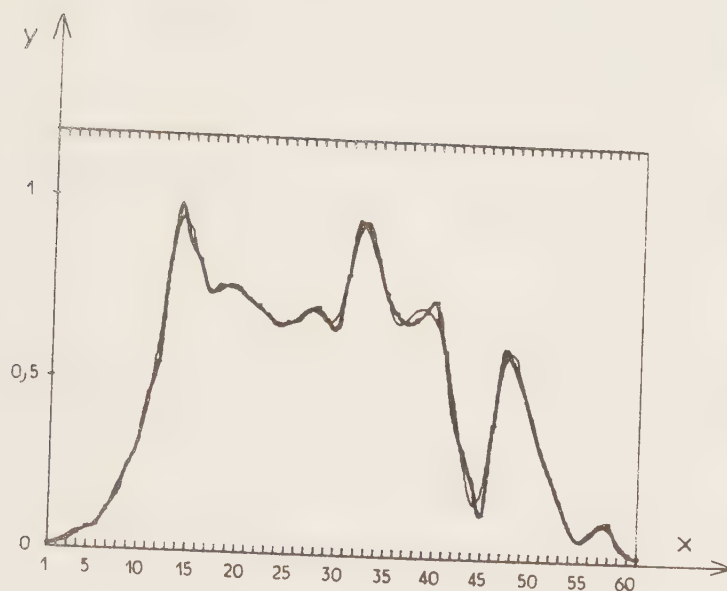


Figure 4 - Graphes :

- $A(x)$
- $A_{13}^c(x)$ (Ce poly.
nôme contient
27 termes)

Chapitre II

APPLICATION AUX LISSAGE ET CORRECTION DE RESOLUTION DES SCINTIGRAPHIES NUMERIQUES

La scintigraphie est une méthode qui permet de visualiser des organes ou des tissus grâce au rayonnement qu'émet le composé radio-actif fixé électivement sur eux.

Les détecteurs utilisés sont de deux types : les détecteurs mobiles (scintigraphes classiques) et les détecteurs fixes (gamma - caméras).

La distribution radio-active est caractérisée par la fonction $\bar{A}(x)$ "activité émise moyenne" inconnue en pratique par suite des effets aléatoires et des effets de collimation. Le but de notre étude est de déterminer une approche de cette fonction $\bar{A}(x)$.

On peut toujours ramener, par une translation préalable, l'intervalle de définition de $\bar{A}(x)$, c'est-à-dire le domaine de l'organe, à un intervalle $[0, T]$. En négligeant la variation de la distance entre le collimateur et l'organe, les erreurs de mesure et, dans le cas des collimateurs mobiles, le déplacement de ceux-ci à l'intérieur d'une "maille" (approximation acceptable si la maille est petite), "l'activité observée" $O(x)$ que l'on mesure à l'aide du détecteur est une fonction "échantillonnée" égale, en chaque point x_i , à une réalisation d'une variable aléatoire de Poisson de paramètre $(^1)$ (réf. 4) :

(¹) On rappelle que, pour une variable aléatoire de Poisson, la moyenne et la variance sont égales au paramètre.

$$\bar{O}(x_i) = \int_0^T \bar{A}(v) \cdot R_{x_i}(x_i - v) dv \quad (116)$$

où $R_{x_i}(u)$ est une fonction définie sur la droite réelle $\mathbb{R}$, à valeurs positives et qui dépend éventuellement, comme son écriture l'indique du point x_i . $R_{x_i}(u)$ est appelée "fonction de réponse (ou de résolution) du collimateur au point x_i ".

On note cependant que, pour chaque point x_i , $R_{x_i}(u)$ est une fonction décroissant très rapidement vers zéro quand u tend vers $\pm\infty$. On peut, par conséquent, négliger ses valeurs à l'extérieur d'un intervalle fini $[-\alpha, +\alpha]$ indépendant du point x_i et qui est tel que $2\alpha < T$.

Dans cette étude, nous nous limitons essentiellement au cas des scintigraphes classiques ⁽¹⁾ caractérisé, d'une part, par l'indépendance mutuelle des valeurs mesurées $O(x_i)$ et, d'autre part, par le fait que chaque fonction $R_{x_i}(u)$ est identique à une même fonction $R(u)$ que nous appellerons alors simplement "fonction de réponse (ou de résolution) du collimateur". La relation (116) s'écrit alors :

$$\bar{O}(x_i) = \int_0^T \bar{A}(v) \cdot R(x_i - v) dv$$

La restitution de l'activité émise moyenne $\bar{A}(x)$ à partir de la donnée $O(x)$ peut donc se décomposer en deux opérations différentes :

- le lissage des valeurs mesurées $O(x)$ ou le filtrage des "fluctuations statistiques" pour obtenir une approximation $\bar{O}^c(x)$ (activité observée moyenne calculée) de $\bar{O}(x)$,
- et la correction de résolution du collimateur c'est-à-dire la résolution de l'équation de convolution :

$$\bar{O}^c(x) = \int_0^T \bar{A}^c(v) \cdot R(x-v) dv \quad x \in [0, T] \quad (117)$$

⁽¹⁾ Nous verrons au paragraphe 1 que la méthode, qui sera proposée, reste encore applicable dans le cas des γ -caméras.

pour obtenir une approximation $\bar{A}^c(x)$ (activité émise moyenne calculée) de $\bar{A}(x)$.

Les méthodes classiques de résolution de l'équation (117) se ramènent à deux familles principales :

- (i) l'usage de la transformée de Fourier,
- (ii) et la discrétisation de l'équation considérée en un système d'équations linéaires que l'on résoudra par une des nombreuses méthodes itératives.

Notons toutefois que, contrairement à l'usage des méthodes (ii) où il faut faire précéder la résolution par un lissage, on peut inclure ce dernier dans les méthodes (i).

La méthode que nous proposons est une adaptation de celle décrite dans le chapitre I. Elle réalise, en un seul calcul, lissage et correction de résolution du système. C'est, en outre, une méthode très rapide demandant très peu d'espace mémoire centrale et qui conduit à des résultats très satisfaisants.

Le paragraphe 1 présente la méthode proposée dans le cas de collimation globale où l'activité $\bar{A}(x)$ est supposée faible aux voisinages des bords de l'intervalle $[0, T]$ et ses applications numériques sur trois exemples simulés et un exemple expérimental.

Le paragraphe 2 est consacré au rappel des méthodes classiques et leurs comparaisons avec la méthode proposée.

1. Adaptation de la méthode décrite au chapitre I

11 - PRINCIPE ET EXPOSE THEORIQUE.

Présentons d'abord quelques remarques sur les équations de convolution.

REMARQUES SUR LES EQUATIONS DE CONVOLUTION.

Soient $G(x)$ une fonction définie sur l'intervalle $[0, T]$ et $Q(x)$ une fonction égale à $G(x)$ pour tout $x \in [0, T]$ et prolongé sur $\mathbb{R}$ de façon à être périodique de période T .

Considérons les deux problèmes suivants :

(P1) Trouver une fonction $F(x)$ définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période T telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} F(v) \cdot R(x-v) dv = Q(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (118)$$

(P2) Trouver une fonction $H(x)$ définie sur $[0, T]$ telle que :

$$\int_0^T H(v) \cdot R(x-v) dv = G(x) \quad \forall x \in [0, T] \quad (119)$$

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 27. Si le problème (P1) admet une solution $F(x)$ nulle sur $[0, \alpha] \cup [T-\alpha, T]$, alors les deux problèmes (P1) et (P2) sont équivalents, c'est-à-dire la restriction de $F(x)$ à l'intervalle $[0, T]$ est une solution de (P2) et réciproquement.

Démonstration.

Notons d'abord que pour toute fonction $F(x)$ définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période T ,

$$\int_{\mathbb{R}} F(v) \cdot R(x-v) dv$$

est aussi une fonction périodique de même période T . La relation :

$$\int_{\mathbb{R}} F(v) \cdot R(x-v) dv = Q(x)$$

sera, par conséquent, satisfaite pour tout $x \in \mathbb{R}$ si elle est vérifiée pour tout x appartenant à un intervalle quelconque de longueur T , soit $[0, T]$ par exemple. La relation (118) est donc équivalente à :

$$\int_{\mathbb{R}} F(v) \cdot R(x-v) dv = G(x) \quad \forall x \in [0, T] \quad (120)$$

relation dont l'écriture ne diffère de celle de (119) que par le domaine d'intégration.

Il ne nous reste donc qu'à démontrer que si $F(x)$ est nulle sur $[0, \alpha] \cup [T-\alpha, T]$, alors pour tout $x \in [0, T]$, $F(v) \cdot R(x-v)$ est aussi nulle pour tout $v \in [0, T]$.

En effet, comme $R(u)$ est par hypothèse nulle pour tout $u \notin [-\alpha, +\alpha]$, en chaque point x fixé, $R(x-v)$ est donc nulle pour tout $v \notin [x-\alpha, x+\alpha]$. Ceci implique que, pour tout $x \in [0, T]$, $R(x-v)$ est nulle pour tout $v \notin [-\alpha, T+\alpha]$.

D'autre part, $F(v)$ étant supposée nulle sur $[0, \alpha] \cup [T-\alpha, T]$ elle est aussi nulle par périodicité sur $[-\alpha, 0] \cup [T, T+\alpha]$. Pour tout $x \in [0, T]$, $F(v) \cdot R(x-v)$ est donc nulle en tout point $v \in [0, T]$.

(C. Q. F. D.)

On ne manquera pas de remarquer que le problème (P1) n'est rien d'autre que celui posé dans le chapitre précédent et que le problème (P2) est celui de correction de résolution du collimateur que nous avons à résoudre dans le présent chapitre.

Il résulte alors du théorème 27 qu'on ne peut appliquer la méthode décrite au chapitre I à la résolution du problème (P2) que si ce dernier peut être ramené à un problème équivalent de même type que celui de (P1), c'est-à-dire que s'il admet une solution théorique nulle sur $[0, \alpha] \cup [T - \alpha, T]$.

On peut toujours supposer que les points de mesure $x_1, x_2, \dots, x_n$ de $O(x)$ sont définis par :

$$x_i = \frac{i-1}{n} T \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (121)$$

L'idée de base de la méthode proposée est

(i) d'approcher l'activité $\bar{O}(x)$ par le polynôme de lissage au sens des moindres carrés $\bar{O}_p^c(x)$ de $O(x)$ sur le support $x_1, x_2, \dots, x_n$ et dans la base :

$$\{1, \cos \omega x, \sin \omega x, \dots, \cos p\omega x, \sin p\omega x\}$$

où $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et où p est un entier positif tel que $2p+1 \leq n$ (réf. 30),

(ii) puis de substituer l'équation approchée obtenue :

$$\int_0^T \bar{A}_p^c(v) \cdot R(x-v) dv = \bar{O}_p^c(x) \quad \forall x \in [0, T] \quad (122)$$

par l'équation (de même type que celui de l'équation (118)) :

$$\int_{\mathbb{R}} B_p(v) \cdot R(x-v) dv = C_p(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (123)$$

où $C_p(x)$ est une fonction égale à $\bar{O}_p^c(x)$ sur $[0, T]$ et prolongée sur $\mathbb{R}$

de façon à être périodique de période T et où $B_p(x)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ périodique de même période T ,

(iii) et de résoudre enfin l'équation (123) obtenue par la méthode décrite au chapitre I.

Mais, d'après les remarques précédentes, les équations (122) et (123) ne sont équivalentes et la méthode proposée n'est en principe valable que si l'équation (123) admet une solution nulle sur $[0, \alpha] \cup [T-\alpha, T]$.

Ceci nous conduit à limiter notre étude, dans toute la suite de ce paragraphe, au cas où l'on sait à l'avance que la solution stricte $\bar{A}(x)$ est nulle sur $[0, \alpha] \cup [T-\alpha, T]$. Dans les problèmes concrets, cette condition revient simplement à prendre comme intervalle de résolution $[0, T]$, le domaine de l'organe débordé de part et d'autre d'un intervalle de longueur α ⁽¹⁾. On remarque alors qu'il serait inutile de calculer les valeurs de la solution approchée $B_p(x)$ sur $[0, \alpha] \cup [T-\alpha, T]$ car on sait déjà que la solution stricte $\bar{A}(x)$ y est nulle.

Il faudra noter cependant que le polynôme $B_p(x)$ dépend très étroitement du polynôme $\bar{O}_p^c(x)$ et il n'y a aucune raison que sa valeur soit identiquement nulle sur $[0, \alpha] \cup [T-\alpha, T]$. La restriction de $B_p(x)$ à l'intervalle $[0, T]$ n'est donc pas une solution de l'équation (122) considérée.

Toutefois, la condition que $\bar{A}(x)$ soit nulle sur $[0, \alpha] \cup [T-\alpha, T]$ implique que la valeur de $B_p(x)$ sur cet ensemble est assez faible et, par conséquent, que sa restriction à l'intervalle $[0, T]$ est une solution approchée acceptable de l'équation (122) que nous avons à résoudre.

⁽¹⁾ Dans la pratique où on ne peut connaître que les valeurs de $O(x)$, il serait difficile de déterminer avec une certaine précision le domaine de l'organe considéré, on pourra alors prendre comme intervalle de travail $[0, T]$, le plus petit intervalle à l'extérieur duquel les valeurs de $O(x)$ sont négligeables.

D'après ce qui précède, nous voyons que le calcul de $\bar{A}_p^c(x)$ (ou de $B_p(x)$) nécessite deux opérations différentes : le lissage de $O(x)$ et la résolution de l'équation (123).

Néanmoins, nous avons le résultat très important et évident suivant :

Remarque. Soit $C(x)$ une fonction échantillonnée égale à $O(x)$ sur le support $x_1, x_2, \dots, x_n$ et prolongées sur $\{x_1 + iT, x_2 + iT, \dots, x_n + iT\}_{i \in \mathbb{N}}$ de façon à être périodique de période T . $B_p(x)$ est aussi la solution (approchée) tronquée à l'ordre p calculée par la méthode décrite au paragraphe 1112 du chapitre I de l'équation :

$$\int_{\mathbb{R}} B(v) \cdot R(x-v) dv = C(x) \quad (124)$$

Cette remarque nous montre que pour calculer $B_p(x)$, il suffit de résoudre directement l'équation (124) par la méthode indiquée ci-dessus avec troncature systématique de la solution $B(x)$ à l'ordre p . Ceci nous permet de grouper en un seul calcul simple les deux opérations considérées.

Il faudra noter, cependant, que la qualité du résultat dépend étroitement du choix du degré p , surtout lorsque l'effet de résolution du collimateur est assez important.

INFLUENCE ET CHOIX DU DEGRE p .

Pour faciliter l'exposé, nous nous plaçons dans le cas où $R(u)$ est une fonction paire. Nous avons alors (cf. paragraphe 1112 du chapitre I) :

$$\bar{A}_p^c(x) = a_0 + \sum_{j=1}^p (a_j \cos j\omega x + b_j \sin j\omega x)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_0 & = & \frac{1}{n \rho_0} \sum_{i=1}^n O(x_i) \\ a_j & = & \frac{2}{n \rho_j} \sum_{i=1}^n O(x_i) \cdot \cos j \omega x_i \quad j = 1, 2, \dots, p \\ b_j & = & \frac{2}{n \rho_j} \sum_{i=1}^n O(x_i) \sin j \omega x_i \quad j = 1, 2, \dots, p \end{array} \right.$$

Désignons par $\mathcal{D}^p(m, \sigma)$ l'ensemble des variables aléatoires gaussiennes de moyenne m et d'écart-type σ .

Dans les problèmes pratiques, les valeurs $\bar{O}(x_1), \bar{O}(x_2), \dots, \bar{O}(x_n)$ sont en général assez grandes (supérieures à 20, sauf les valeurs aux bords de l'intervalle $[0, T]$). Ceci nous permet de supposer que (réf. 2 et 27) :

$$O(x_i) \in \mathcal{D}^p(\bar{O}(x_i), \sqrt{\bar{O}(x_i)}) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Posons :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} m_0 & = & \frac{1}{n \rho_0} \sum_{i=1}^n \bar{O}(x_i) \\ m_j & = & \frac{2}{n \rho_j} \sum_{i=1}^n \bar{O}(x_i) \cdot \cos j \omega x_i \quad j = 1, 2, \dots, p \\ n_j & = & \frac{2}{n \rho_j} \sum_{i=1}^n \bar{O}(x_i) \cdot \sin j \omega x_i \quad j = 1, 2, \dots, p \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sigma_0 & = & \frac{1}{n \rho_0} \sqrt{\sum_{i=1}^n \bar{O}(x_i)} \\ \sigma_j & = & \frac{2}{n \rho_j} \sqrt{\sum_{i=1}^n \bar{O}(x_i) \cdot \cos^2 j \omega x_i} \quad j = 1, 2, \dots, p \\ \gamma_j & = & \frac{2}{n \rho_j} \sqrt{\sum_{i=1}^n \bar{O}(x_i) \cdot \sin^2 j \omega x_i} \quad j = 1, 2, \dots, p \end{array} \right.$$

Comme $O(x_1), O(x_2), \dots, O(x_n)$ sont deux à deux indépendantes, on vérifie aisément que :

$$\begin{cases} a_j \in \mathcal{N}(m_j, \sigma_j) & j = 0, 1, \dots, p \\ b_j \in \mathcal{N}(n_j, \gamma_j) & j = 1, 2, \dots, p \end{cases}$$

En général, la fonction $\bar{O}(x)$ est assez régulière de sorte que les coefficients m_j et n_j , pour les valeurs élevées de j , sont faibles et deviennent petits par rapport aux σ_j et γ_j correspondants. Les coefficients a_j et b_j de $\bar{A}_p^c(x)$ sont donc des variables aléatoires dont les moyennes respectives sont petites par rapport aux écart-types correspondants et, par conséquent, leurs valeurs ainsi que celles de $\bar{A}_p^c(x)$ deviennent aberrantes dès que j et p dépassent une certaine valeur assez faible.

Nous devons donc limiter le degré p à une valeur assez basse. Une première idée serait de le choisir comme celui qui minimise l'écart :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \bar{A}(x_i) \neq 0}} \left| \frac{\bar{A}_p^c(x_i) - \bar{A}(x_i)}{\bar{A}(x_i)} \right|$$

Mais, dans les problèmes concrets, ce choix n'est pas réalisable car on ignore totalement $\bar{A}(x)$. Une seconde idée serait de prendre :

$$p = \text{Min} \{q \text{ tel que } |a_i| \geq \mu M \text{ et } |b_i| \geq \mu M \quad \forall i \geq q \text{ avec } 2i+1 \leq n\}$$

où M est la moyenne des valeurs $O(x_1), O(x_2), \dots, O(x_n)$ et où μ est un réel positif arbitraire assez petit. Mais ceci alourdit sensiblement le calcul car il nécessite la connaissance de certains coefficients a_i et b_i . De plus, le choix de μ pour que p soit un degré optimal dépend à la fois des fonctions $R(u)$ et $\bar{A}(x)$ et est ainsi très délicat.

Nous sommes alors conduit à effectuer un choix à priori fixé selon le type d'organes examinés et l'importance d'effet de résolution du collimateur employé. Notons, toutefois, qu'une valeur trop petite

écarte trop la solution approchée de la solution théorique et qu'une valeur trop grande fait apparaître des artéfacts sous forme d'oscillations et peut rendre, dans le cas extrême, le résultat illisible.

Remarques dans le cas des γ -caméras.

Dans le cas des scintigraphes classiques, deux des principaux facteurs d'erreurs inhérentes aux valeurs mesurées $O(x_1)$, $O(x_2)$, ..., $O(x_n)$ sont le déplacement du collimateur à l'intérieur de chaque "maille" et l'irrégularité des "temps de pose".

Les γ -caméras ont, sur les scintigraphes classiques, les avantages suivants :

- les deux facteurs d'erreurs de mesure indiqués ci-dessus ne se présentent pas,
- et le temps de pose pour chaque valeur mesurée $O(x_i)$ est plus long ⁽¹⁾ ; par conséquent, chaque valeur $O(x_i)$ est plus élevée et, par suite, l'influence des fluctuations statistiques est plus faible.

Cependant, elles ont l'inconvénient que la fonction de résolution du collimateur varie d'un point de mesure à l'autre ; ce qui complique considérablement le problème.

Néanmoins, la variation de la fonction considérée est assez faible. Ceci a conduit certains auteurs (réf. 4), dans le but de faciliter la résolution du problème, à définir une fonction appelée "fonction de résolution moyenne du collimateur", que nous notons encore $R(u)$, par :

$$R(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{x_i}(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

⁽¹⁾ Dans le cas des scintigraphes classiques, les valeurs $O(x_1)$, $O(x_2)$, ..., $O(x_n)$ sont mesurées les unes après les autres, le temps de pose τ pour chaque valeur $O(x_i)$ est donc égal à θ/n , θ étant le temps de mesure total. Mais, dans le cas des γ -caméras, ces valeurs sont mesurées en même temps ; on a donc $\tau = \theta$.

et à approcher ensuite l'équation intégrale (116) par l'équation de convolution :

$$\bar{O}(x_i) = \int_0^T \bar{A}(v) R(x_i - v) dv \quad (125)$$

Nous voyons alors que le problème que nous avons à résoudre finalement est le même que celui obtenu dans le cas des scintigraphes classiques. Il en résulte donc que la méthode développée précédemment reste encore applicable.

Toutefois, on peut noter que la différence essentielle qui existe entre le cas des scintigraphes classiques et celui des γ -caméras est que, dans le premier, les valeurs mesurées $O(x_1)$, $O(x_2)$, ..., $O(x_n)$ sont mutuellement indépendantes alors que, dans le second, elles sont au contraire fortement dépendantes.

Nous ne présentons pas, dans ce paragraphe, le cas de deux variables. En effet, l'étude que nous venons d'exposer dans le cas d'une variable se généralise aisément à ce cas.

Notons, cependant, que dans les problèmes pratiques, on se limite généralement au cas où R est une fonction gaussienne centrée à l'origine des axes (cf. paragraphe 12. de ce chapitre). Cette restriction allège considérablement les calculs puisqu'une telle fonction est paire et égale, dans le cas de deux variables, au produit tensoriel de deux fonctions gaussiennes d'une variable centrées également à l'origine des axes (cf. paragraphe 112. et 122. du chapitre I).

12 - APPLICATIONS NUMERIQUES

Dans la pratique, pour les collimateurs généralement utilisés, on peut approcher valablement leurs fonctions de résolution par des fonctions

de Gauss (réf. 8) ou par des sommes de trois fonctions de Gauss (réf. 33).

Ceci nous conduit, comme beaucoup d'auteurs (réf. 5, 35 et 36), à limiter notre étude dans toute la suite de ce paragraphe au cas où la fonction de résolution R est une fonction de Gauss. Mais, il faut noter, cependant, que la méthode développée reste encore valable dans le cas où R est une fonction quelconque.

Pour un collimateur donné, on définit habituellement sa fonction de résolution $R(u)$ à l'aide de sa largeur-à-mi-hauteur (L.M.H.) (cf. figure 1, page 61) par :

$$R(u) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{2,8}{LMH^2} u^2}}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-\frac{2,8}{LMH^2} w^2} dw} & \text{si } u \in [-\alpha, +\alpha] \\ 0 & \text{si } u \notin [-\alpha, +\alpha] \end{cases} \quad (1)$$

où α est un réel positif arbitraire supérieur à $LMH/2$.

Nous présenterons des résultats obtenus à partir des exemples simulés. L'intérêt de la simulation sur ordinateur réside sur le fait que l'on connaît la solution théorique et qu'on peut la comparer aux résultats obtenus par le traitement.

Nous présenterons également des résultats obtenus à partir d'une scintigraphie réelle du fantôme de thyroïde international de Picker.

121 - EXEMPLES SIMULES.

(1) La valeur théorique de cette intégrale n'est connue que si $\alpha = +\infty$ (réf. 43). Lorsque α est un nombre fini, nous la calculons par la méthode de trapèze généralisée (réf. 30).

1211 - CONSTRUCTION DES EXEMPLES SIMULES

Nous ne présentons ici que le cas d'une variable mais la technique que nous allons exposer se généralise sans difficulté au cas de deux variables.

De plus, nous nous limitons au cas où n est impair et où $\bar{A}(x)$ est une fonction échantillonnée définie sur le support $x_1, x_2, \dots, x_n$ et nulle en tout point x_i du support appartenant à $[0, \alpha] \cup [T-\alpha, T]$.

Le calcul des valeurs simulées $O(x_1), O(x_2), \dots, O(x_n)$ se fait en deux étapes : la première consiste à calculer, à partir des valeurs $\bar{A}(x_1), \bar{A}(x_2), \dots, \bar{A}(x_n)$ celles de $\bar{O}(x_1), \bar{O}(x_2), \dots, \bar{O}(x_n)$ et la seconde à partir de ces dernières celles de $O(x_1), O(x_2), \dots, O(x_n)$.

Le procédé de calcul des valeurs de $\bar{O}(x_1), \bar{O}(x_2), \dots, \bar{O}(x_n)$ utilisé est donné au paragraphe 21 du chapitre I. Il faut noter alors que ce procédé suppose que $\bar{A}(x)$ est identique à son polynôme d'interpolation sur le support $x_1, x_2, \dots, x_n$ et dans la base

$$1, \cos \omega x, \sin \omega x, \dots, \cos m\omega x, \sin m\omega x$$

avec $m = \frac{n-1}{2}$ et il n'y a par conséquent aucune raison qu'elle soit nulle en tout point $x \in [0, \alpha] \cup [T-\alpha, T]$. Cependant, la condition $\bar{A}(x)$ nulle en tout point x_i du support appartenant à cet ensemble implique nécessairement que ses valeurs sur cet ensemble sont faibles et peuvent être ainsi négligées.

Les valeurs de $O(x_1), O(x_2), \dots, O(x_n)$ peuvent être obtenues en simulant les réalisations de n variables aléatoires deux à deux indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs $\bar{O}(x_1), \bar{O}(x_2), \dots, \bar{O}(x_n)$. Mais cette simulation demande un temps de calcul assez long et nous pouvons le réduire en les approchant par n variables aléatoires normales de moyennes $\bar{O}(x_1), \bar{O}(x_2), \dots, \bar{O}(x_n)$ et d'écart-type $\sqrt{\bar{O}(x_1)}, \sqrt{\bar{O}(x_2)}, \dots, \sqrt{\bar{O}(x_n)}$ respectivement. Cette approche est justifiée par le

fait qu'une variable aléatoire de Poisson dont le paramètre est assez élevé (supérieur à 20), ce qui est en général le cas ici, peut être approchée par une variable aléatoire normale de même moyenne et écart-type.

Nous ne décrivons pas, dans cet ouvrage, le procédé de simulation utilisé. C'est, en effet, un procédé classique déjà employé dans les références 25, 27 et 28.

1212 - RESULTATS

12121 - CAS D'UNE VARIABLE

Nous présentons ici deux exemples en y fixant $T = 2\pi$, $n = 69$ et $\alpha = 4\Delta x$ où Δx est l'écart T/n entre deux points x_i consécutifs. Le premier exemple est consacré au cas où l'effet de résolution du collimateur est assez faible et le second au cas où celui-ci est par contre très important.

EXEMPLE 1.

Dans cet exemple, nous avons choisi comme activité $\bar{A}(x)$ une fonction utilisée par Iinuma et Nagai (réf. 22) et représentée dans la figure 5 et fixé la LMH de la fonction $R(u)$ égale à $3.\Delta x$.

La valeur maximale de $\bar{A}(x)$ est fixée égale à 280. C'est une valeur assez faible et qui implique, par conséquent, que l'influence des fluctuations statistiques est au contraire assez importante.

Nous présentons également, dans la figure 5, les activités $\bar{O}(x)$ et $O(x)$. En comparant les graphes des deux fonctions $\bar{A}(x)$ et $\bar{O}(x)$, on remarque que l'effet de résolution du collimateur correspondant à la fonction $R(u)$ considérée est assez faible.

On trouvera dans les figures 6, 7 et 8 les différents résultats ⁽¹⁾

⁽¹⁾ La définition de $O_P^C(x)$ est donnée au paragraphe 11. de ce chapitre. Elle peut être, ^P toutefois, calculée par les formules de calcul de $A_P^C(x)$ en y faisant (dans ce cas où $R(u)$ est paire) $\rho_0 = \rho_1 = \dots = \rho_p = 1$ (cf. paragraphe 112 du chapitre I).

$\bar{O}_p^c(x)$ et $\bar{A}_p^c(x)$ obtenus respectivement par le simple lissage et par notre méthode pour p égal respectivement à 10, 13 et 16.

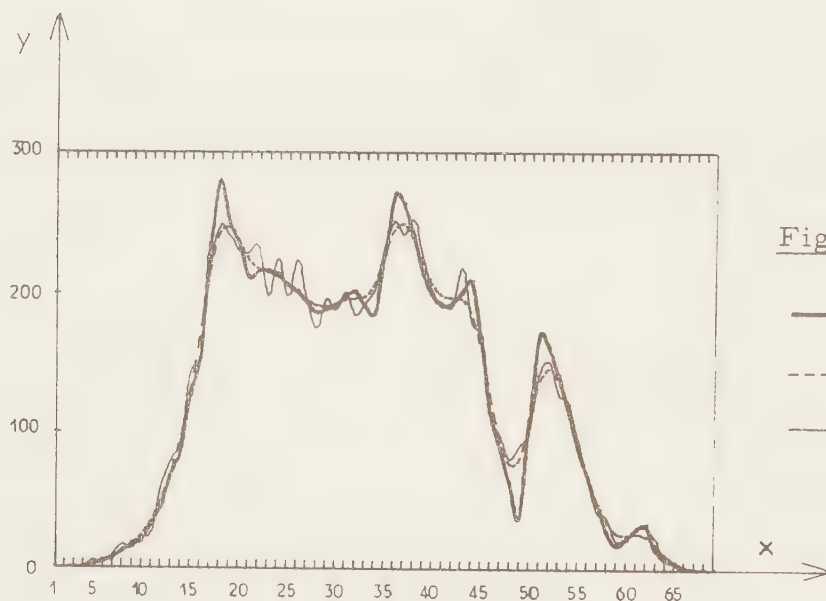


Figure 5. Graphes de

— $\bar{A}(x)$
 - - - $\bar{O}(x)$
 - - - $O(x)$

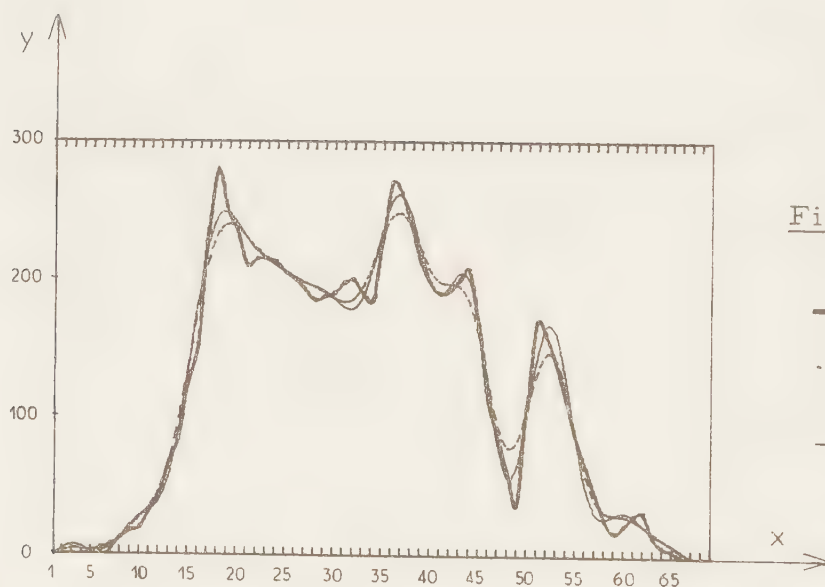


Figure 6. Graphes de

— $\bar{A}(x)$
 - - - $\bar{O}_{10}^c(x)$
 - - - $\bar{A}_{10}^c(x)$

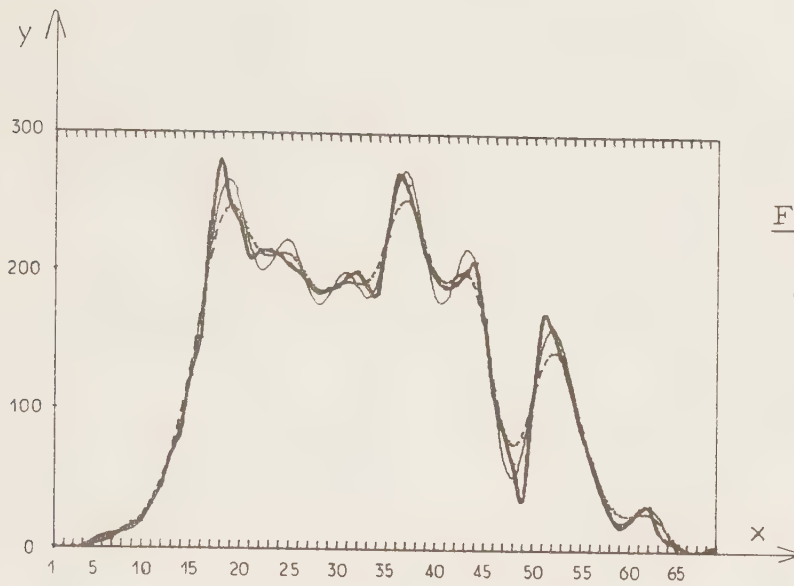


Figure 7. Graphes de

$$\begin{aligned} & \text{—} \bar{A}(x) \\ & \text{---} \bar{O}_{13}^c(x) \\ & \text{—} \bar{A}_{13}^c(x) \end{aligned}$$

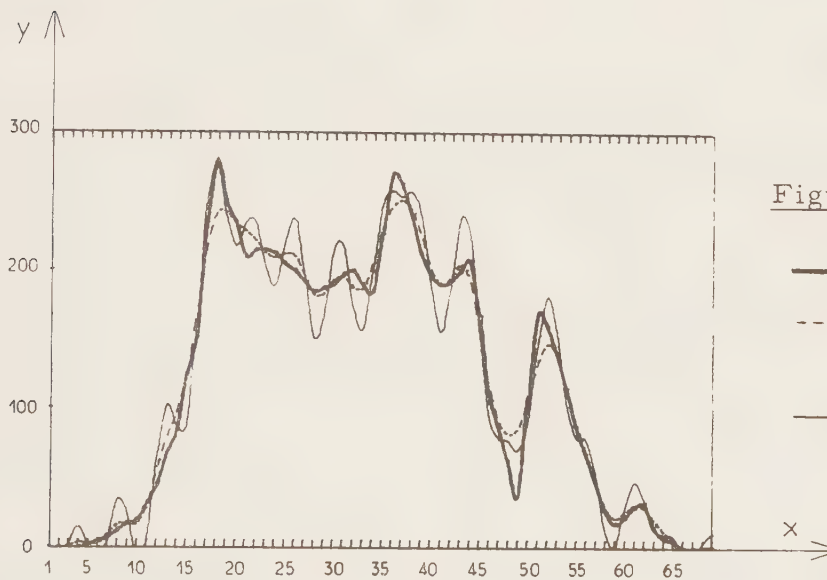


Figure 8. Graphes de

$$\begin{aligned} & \text{—} \bar{A}(x) \\ & \text{---} \bar{O}_{16}^c(x) \\ & \text{—} \bar{A}_{16}^c(x) \end{aligned}$$

Pour la méthode proposée, nous voyons que la valeur du degré $p = 10$ (cf. figure 6) ne fait pas ressortir les anomalies situées entre les points x_{21} et x_{35} , elle est donc une valeur trop petite.

Mais, par contre, la valeur $p = 16$ (cf. figure 8) fait apparaître des oscillations de trop grandes amplitudes et est, par conséquent, trop élevée.

Le meilleur résultat ⁽¹⁾ obtenu par notre méthode est présenté dans la figure 7. Il correspond à la valeur du degré $p = 13$. Celui obtenu par le simple lissage correspond à la valeur $p = 14$. Nous ne donnons pas ici sa représentation graphique car la différence entre son graphe et celui du résultat obtenu avec la valeur $p = 13$ que nous avons présenté dans la figure 7 n'est pas perceptible.

Les résultats obtenus par les deux méthodes considérées varient très peu pour p compris entre 11 et 14.

La concordance entre l'activité $\bar{A}_p^c(x)$ calculée par notre méthode et l'activité de départ $\bar{A}(x)$ est très satisfaisante. On note également que l'activité $\bar{A}_p^c(x)$ est plus proche de l'activité $\bar{A}(x)$ que l'activité $\bar{O}_p^c(x)$ obtenue par le simple lissage.

EXEMPLE 2.

Nous prenons comme activité de départ $\bar{A}(x)$ une fonction inspirée de celle utilisée dans l'exemple 1 mais plus régulière (cf. figure 9).

La valeur maximale de $\bar{A}(x)$ est fixée égale à 248 et la LMH de la fonction $R(u)$ à $6\Delta x$. On voit donc, dans cet exemple, que l'influence des fluctuations statistiques et l'effet de résolution du collimateur correspondant à la fonction $R(u)$ considérée (qui est comparable à celui utilisé par Inuma et Nagai dans la référence 22) sont très importants (cf. figure 9).

Nous voyons, d'après les résultats présentés dans la figure 10, que la valeur du degré $p = 4$ est trop faible. Ces résultats s'améliorent sensiblement quand nous augmentons la valeur de p à 6 (cf. figure 11).

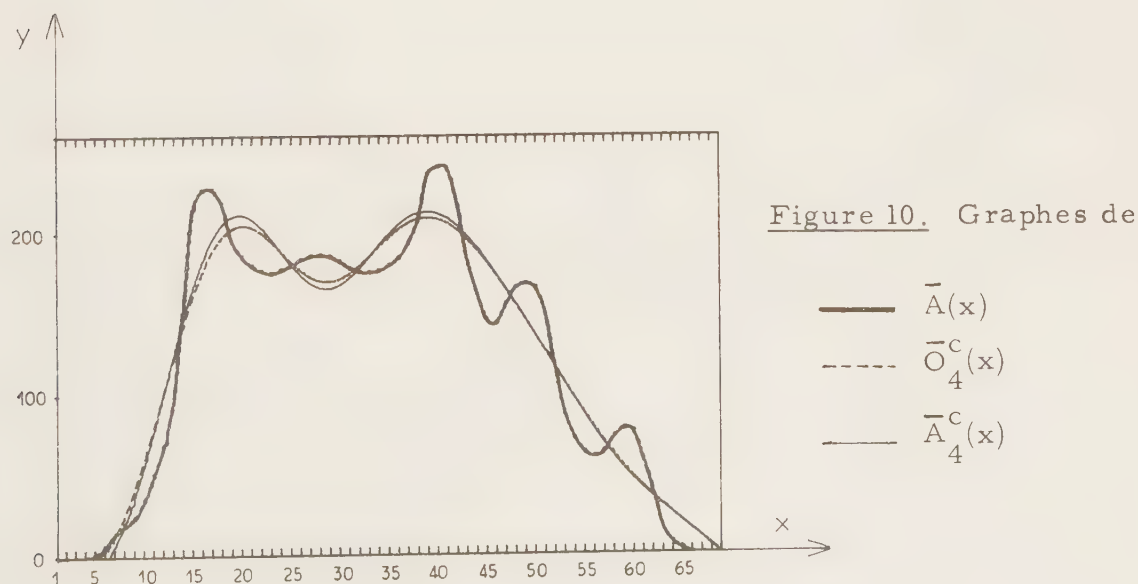
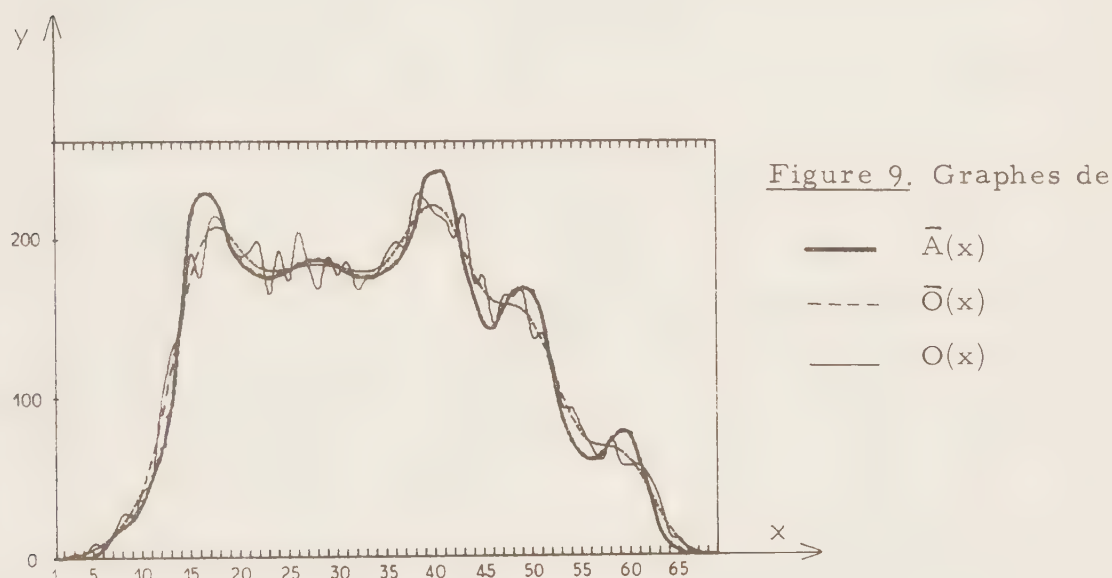
Pour notre méthode, le meilleur résultat est obtenu avec $p = 8$ (cf. figure 12) et nous constatons qu'il est très proche de l'activité de

⁽¹⁾ Nous définissons le meilleur $\bar{A}_p^c(x)$ comme celui qui minimise l'écart :

$$\sum_{i=1}^n |\bar{A}(x_i) - \bar{A}_p^c(x_i)|$$

départ $\bar{A}(x)$. Ce résultat se dégrade perceptiblement lorsque nous augmentons de nouveau la valeur de p (cf. figure 13) et devient aberrant dès que celle-ci dépasse 12 (cf. figure 14).

Quant au simple lissage, le meilleur résultat est obtenu avec $p = 10$ (cf. figure 13). On remarque qu'il est peu proche de $\bar{A}(x)$ et d'ailleurs, les anomalies situées aux voisinages des points x_{49} et x_{59} ne sont pas du tout mises en évidence.



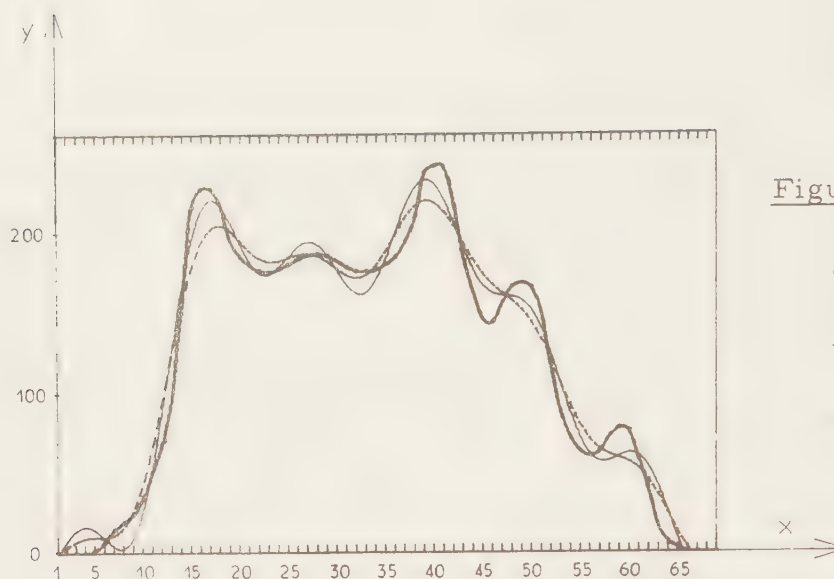


Figure 11. Graphes de

$$\begin{aligned} & \text{—} \bar{A}(x) \\ & \text{---} \bar{O}_6^c(x) \\ & \text{—} \cdot \bar{A}_6^c(x) \end{aligned}$$

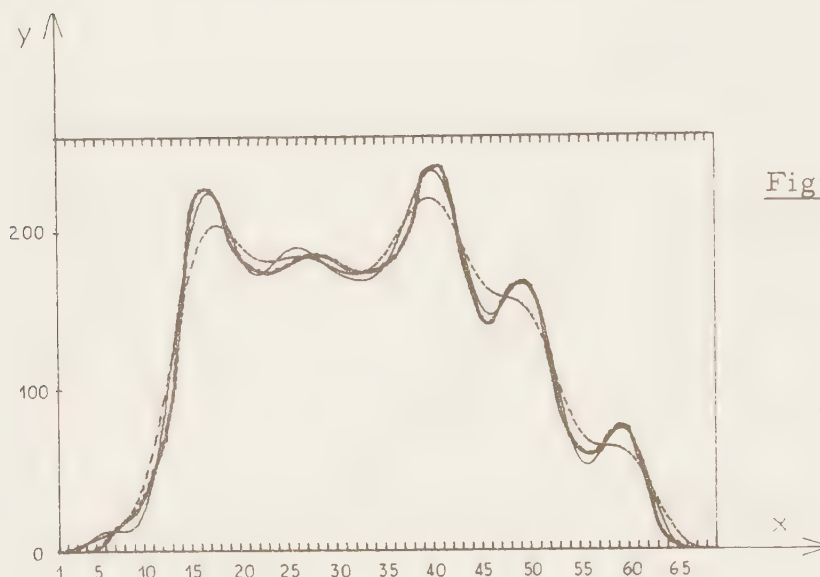


Figure 12. Graphes de

$$\begin{aligned} & \text{—} \bar{A}(x) \\ & \text{---} \bar{O}_8^c(x) \\ & \text{—} \cdot \bar{A}_8^c(x) \end{aligned}$$

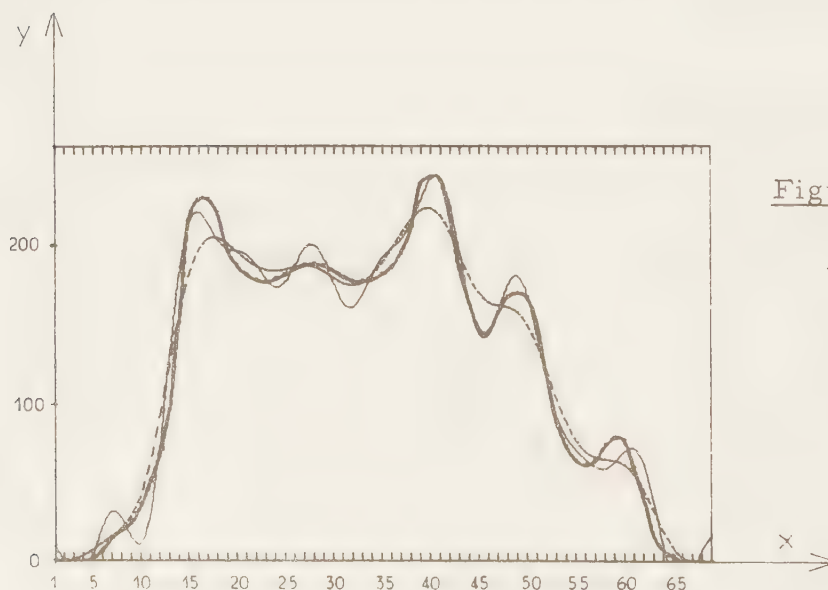
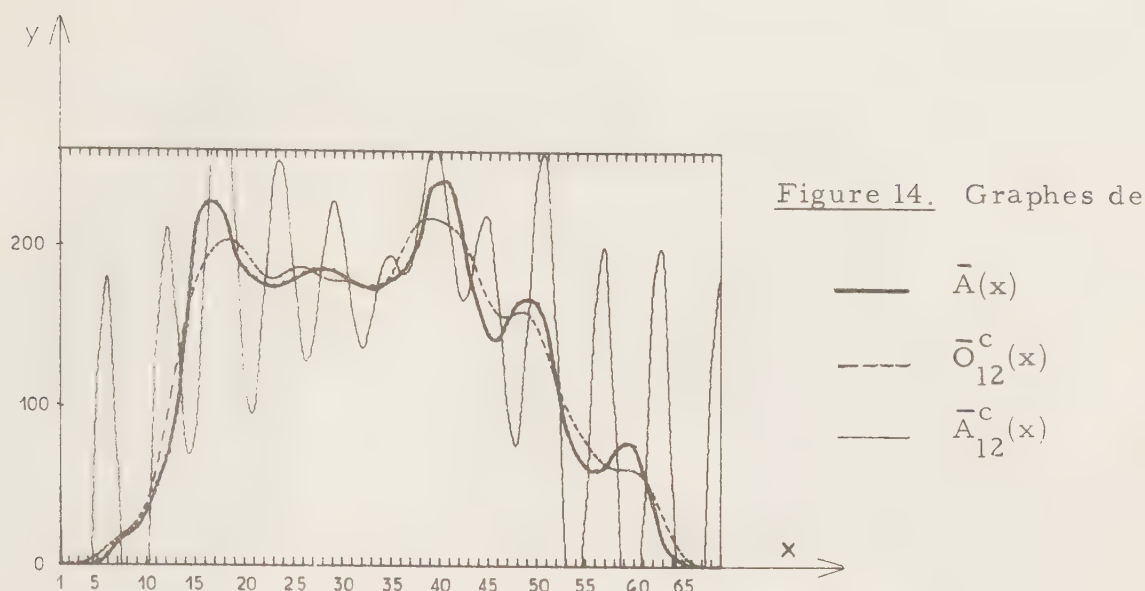


Figure 13. Graphes de

$$\begin{aligned} & \text{—} \bar{A}(x) \\ & \text{---} \bar{O}_{10}^c(x) \\ & \text{—} \cdot \bar{A}_{10}^c(x) \end{aligned}$$



12122 - CAS DE DEUX VARIABLES

Dans le cas à deux variables, la représentation des divers documents (données et résultats) pose un problème assez délicat. De nombreux travaux ont été portés sur ce sujet et un grand nombre de méthodes ont été proposées dépendamment du matériel disposé.

Mais, dans cette étude, nous n'utiliserons que les deux représentations suivantes : le tracé des courbes de niveaux correspondantes aux valeurs 20, 30, ..., 80 et 90 % de la valeur maximale de la fonction considérée et la représentation isométrique ⁽¹⁾ des valeurs supérieures à 20 % de cette valeur maximale.

Nous ne développons pas ici les procédés et techniques concernant ces représentations. Ce sont, en effet, des méthodes très connues et qui sont déjà décrites dans les références 29 et 34.

Il s'agit d'une simulation d'un fantôme de foie défini par une matrice de 37 colonnes et 29 lignes et présentant une zone d'hypoactivité centrée au point (16, 11) (16^{ème} colonne et 11^{ème} ligne) (cf. figure 15). La valeur maximale de l'activité de départ $\bar{A}(x, y)$ est égale à 295.

⁽¹⁾ La qualification "isométrique" provient du fait que cette représentation possède la propriété de conserver les distances dans un même rapport pour une direction donnée.

Le domaine de résolution est le carré $[0, 2\pi]^2$.

La fonction de résolution $R(u, v)$ est égale au produit tensoriel de deux fonctions $R_1(u)$ et $R_2(v)$ définies par :

$$R_1(u) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{2,8 u^2}{LMH_1^2}}}{e^{\int_{-\alpha_1}^{+\alpha_1} -\frac{2,8 w^2}{LMH_1^2} dw}} & \text{si } u \in [-\alpha_1, +\alpha_1] \\ 0 & \text{si } u \notin [-\alpha_1, +\alpha_1] \end{cases} \quad (126)$$

$$R_2(v) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{2,8 v^2}{LMH_2^2}}}{e^{\int_{-\alpha_2}^{+\alpha_2} -\frac{2,8 w^2}{LMH_2^2} dw}} & \text{si } v \in [-\alpha_2, +\alpha_2] \\ 0 & \text{si } v \notin [-\alpha_2, +\alpha_2] \end{cases} \quad (127)$$

dans lesquelles nous fixons $LMH_1 = LMH_2 = 3\Delta x$, $\alpha_1 = 2\Delta x$ et $\alpha_2 = 2\Delta y$ où $\Delta x = \frac{2\pi}{37}$ et $\Delta y = \frac{2\pi}{29}$ représentent respectivement les écarts entre deux points consécutifs situés sur une même ligne et une même colonne.

Cependant, pour que la méthode proposée puisse conduire à des résultats satisfaisants, nous donnons à $\bar{A}(x, y)$ la valeur nulle en tout point (x, y) du support extérieur au rectangle $[\alpha_1, 2\pi - \alpha_1] \times [\alpha_2, 2\pi - \alpha_2]$ (cf. paragraphe 11 de ce chapitre).

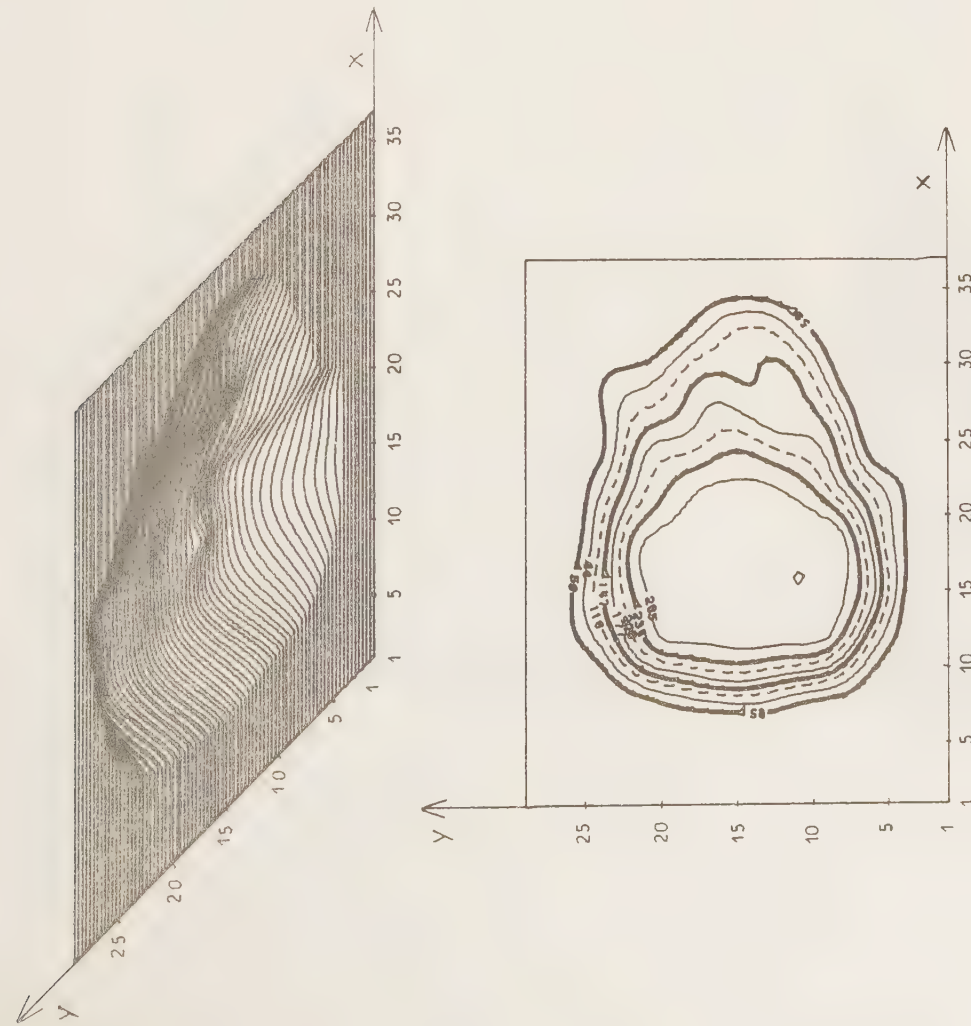


Figure 15. Activité donnée $\bar{A}(x, y)$

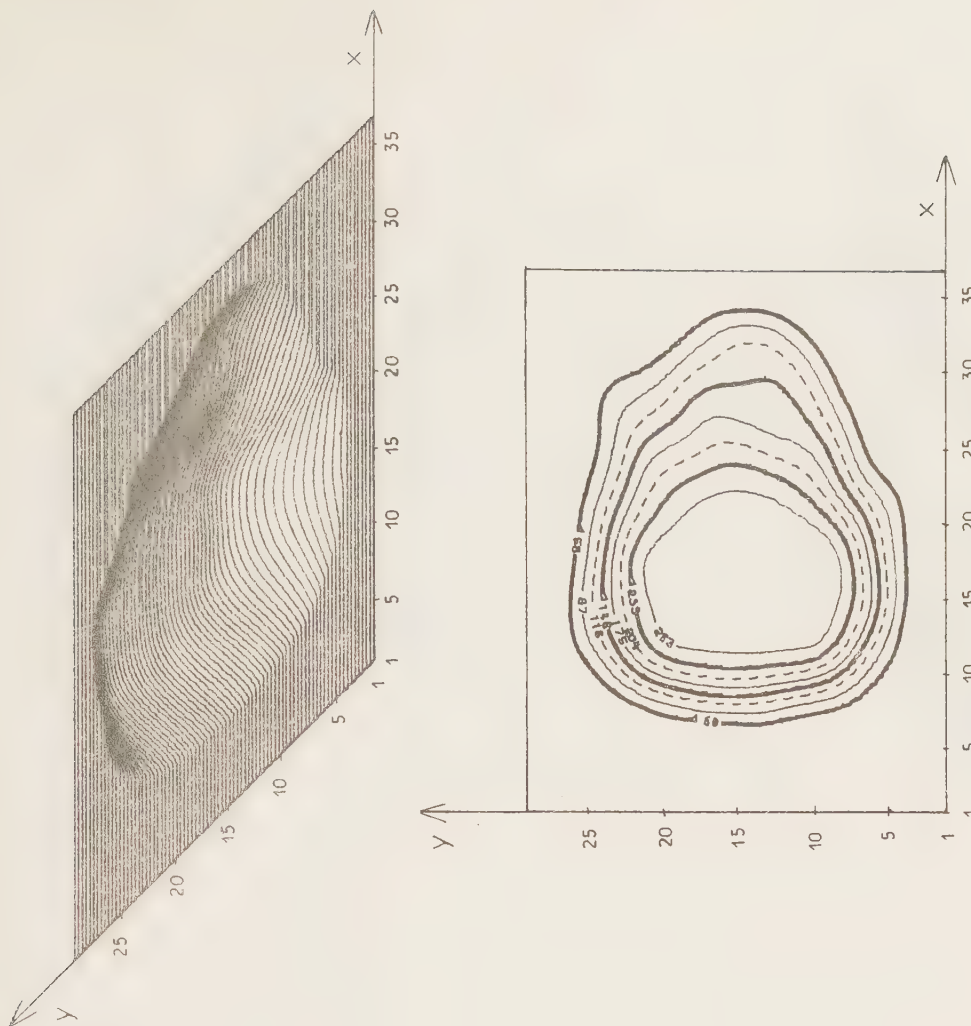
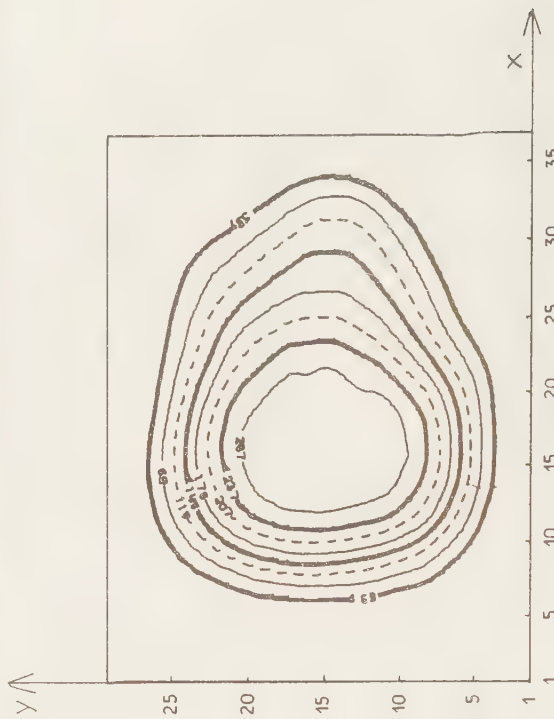
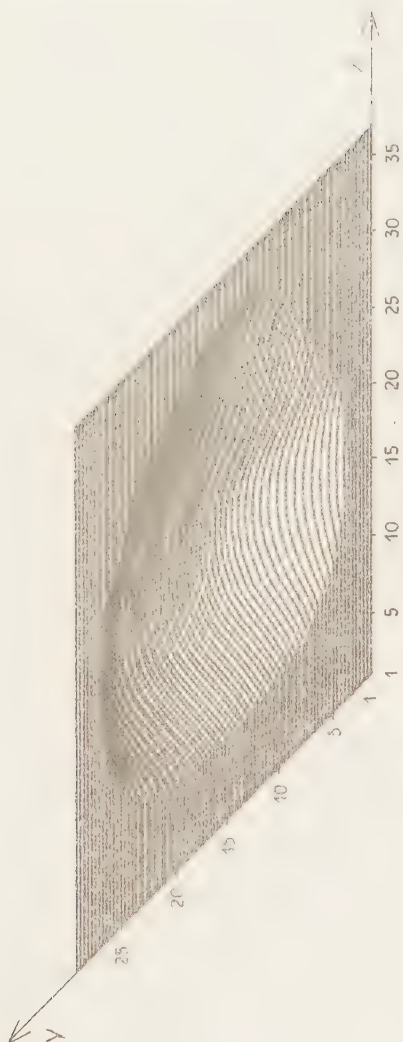


Figure 16. Activité observée non brouillée $\bar{O}(x, y)$



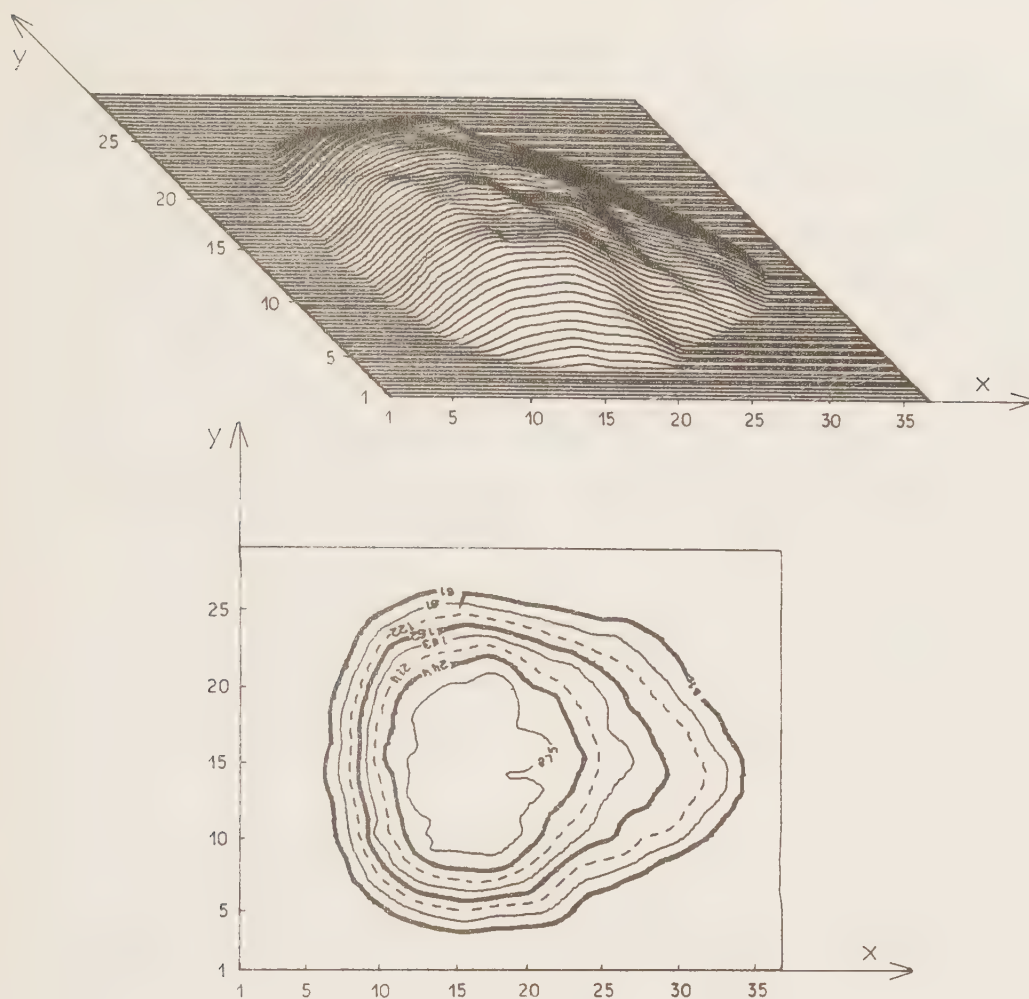


Figure 23.

Résultat obtenu par moyennage non pondéré 9 points.

La figure 16 présente l'activité observée moyenne $\bar{O}(x, y)$. On remarque, dans cette figure, que l'effet de résolution du collimateur associé à la fonction $R(u, v)$ considérée a presque caché le creux indiqué et est, par conséquent, assez important.

La figure 17 montre l'activité brouillée $O(x, y)$ (valeur maximale = 325 en (14, 15)). Nous voyons que la présence des fluctuations statistiques, qui sont dans ce cas très importantes, a rendu cette activité illisible.

Désignons par $\bar{A}_{p, q}^c(x, y)$ l'activité traitée calculée par notre méthode avec les degrés p ($p \leq 18$) en x et q ($q \leq 14$) en y et par $\bar{O}_{pq}^c(x, y)$ celle obtenue par simple lissage avec les mêmes degrés. Cependant, nous ne présentons dans cette étude que les résultats obtenus en prenant

$$p = q \binom{1}{1}.$$

Les résultats fournis par notre méthode pour $p = q = 4, 5$ et 6 apparaissent respectivement sur les figures 18, 19 et 20. Leurs valeurs maximales respectives sont égales à 307, 303 et 317 et se situent aux points (14, 15), (17, 15) et (15, 14). Dans la figure 18, le creux commence déjà à apparaître mais il n'est pas encore bien localisé. Sur la figure 20, il apparaît de nombreux artéfacts sous forme d'oscillations et par conséquent les degrés choisis sont trop élevés. Le meilleur résultat est présenté dans la figure 19 ; on y constate que le creux indiqué apparaît d'une façon nette et bien localisée.

Le meilleur résultat obtenu par simple lissage correspond à $p = q = 6$ et est présenté dans la figure 21 (valeur maximale = 303 en (15, 14)). Sur cette figure, on remarque qu'il est difficile de déceler le creux envisagé.

Nous avons également l'occasion de programmer, dans cette étude, deux autres méthodes de filtrage des fluctuations statistiques très connues : le moyennage non pondéré 9 points (valeur maximale = 305 en (15, 14)) et la méthode de Tauxe (valeur maximale = 296 en (16, 15)) (cf. paragraphe 21 de ce chapitre). Mais, il semble que les résultats obtenus (cf. figures 22 et 23) sont de qualité encore inférieure à celui fourni par simple lissage avec les degrés $p = q = 6$.

122.- EXEMPLE EXPERIMENTAL.

L'étude expérimentale que nous envisageons dans ce paragraphe porte sur le fantôme de thyroïde (Picker) rempli d'une solution aqueuse d'I131. Sa représentation graphique est présentée dans la figure 24.

¹) Nous avons aussi effectué des essais en prenant $p \neq q$. Mais, d'après les résultats obtenus, il semble que seulement lorsque le nombre de colonnes m et celui de lignes n sont très différents qu'il est nécessaire de choisir $p \neq q$ et tels que $p/m \simeq q/n$.

L'appareil de recueil et de discrétisation de l'activité observée $O(x)$ (réf. 29) est branché sur un scintigraphe SAIP (diamètre du cristal égal à 5 pouces). Il recueille le nombre d'impulsions sur une longueur de balayage choisie ("maille") et perfore cette valeur sur un ruban de papier. L'ensemble des valeurs obtenues sera traité ultérieurement sur un ordinateur CII 10070.

Pour obtenir des valeurs assez élevées de façon à réduire l'importance relative des fluctuations statistiques, nous avons utilisé une vitesse de balayage réduite (24cm/mn).

L'interligne était égal à 2mm et la maille fixée à 2mm. Chaque valeur obtenue correspond donc à une aire élémentaire carrée de 2 mm de côté.

La fonction de résolution $R(u, v)$ du collimateur utilisé a une largeur-à-mi-hauteur égale à 5,8mm. Nous admettons que $R(u, v)$ est une fonction gaussienne de révolution non tronquée, c'est-à-dire égale au produit tensoriel de deux fonctions gaussiennes d'une variable $R_1(u)$ et $R_2(v)$ définies par les relations (126) et (127) avec $\alpha_1 = \alpha_2 = +\infty$ ($LMH_1 = LMH_2 = 5,8 \text{ mm}$).

Nous verrons, d'après les résultats obtenus, que dans le cas où nous ne nous intéressons qu'aux valeurs supérieures à un certain seuil assez élevé et où les valeurs de $O(x, y)$ sont assez faibles aux voisinages du contour du domaine de résolution $[0, T_1] \times [0, T_2]$, la condition que $R(u, v)$ soit nulle à l'extérieur d'un rectangle fini $[-\beta_1, +\beta_1] \times [-\beta_2, +\beta_2]$ et que l'activité émise moyenne $\bar{A}(x, y)$ soit également nulle à l'extérieur du rectangle $[\beta_1, T_1 - \beta_1] \times [\beta_2, T_2 - \beta_2]$ devient secondaire, c'est-à-dire qu'elle n'altère pas les résultats que nous obtiendrons par notre méthode.

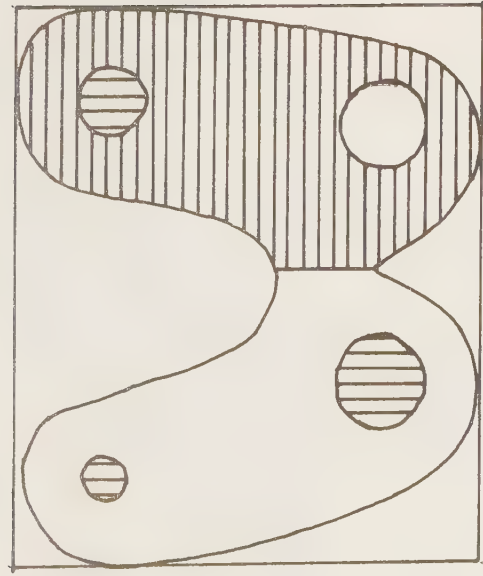
Les représentations des divers documents obtenus que nous utiliserons sont celles employées au paragraphe 12122.

La figure 25 montre la scintigraphie brute non traitée du fantôme considéré définie par une matrice de 37 colonnes et 37 lignes (valeur maximale = 431 en (10, 17)).

La figure 26 présente le meilleur résultat obtenu par simple lissage avec les degrés $p = q = 7$ (valeur maximale = 395 en (11, 19)). Les nodules inférieurs apparaissent nettement mais les supérieurs plus discrètement. Le moyennage non pondéré 9 points (valeur maximale = 394 en (10, 20)) et la méthode de Tauxe (valeur maximale = 389 en (10, 20)) (cf. paragraphe 21 de ce chapitre) donnent des résultats de moins bonne qualité comme le montrent les figures 27 et 28.

Le meilleur résultat obtenu par notre méthode est présenté par la figure 29. Il correspond aux degrés $p = q = 5$ (valeur maximale = 417 en (10, 18)). Les quatre nodules sont bien visibles sans artéfacts supplémentaires. Ils s'amplifient davantage avec les degrés $p = q = 6$ (cf. figure 30, valeur maximale = 421 en (14, 17)) mais de petites ondulations commencent à apparaître. Ces artéfacts deviennent excessifs et franchement anormaux avec les degrés $p = q = 7$ (cf. figure 31 ; valeur maximale = 447 en (14, 18)).

Enfin, on peut noter que la méthode proposée est une méthode de programmation simple, rapide et fine. Non seulement elle fait apparaître des anomalies mais elle conduit aussi à un résultat assez proche de la véritable inconnue $\bar{A}(x, y)$.



-  zone radioactive à 100 %
-  zone radioactive à 50 %
-  zone radioactive à 0 %

Figure 24. Schéma du fantôme de thyroïde Picker

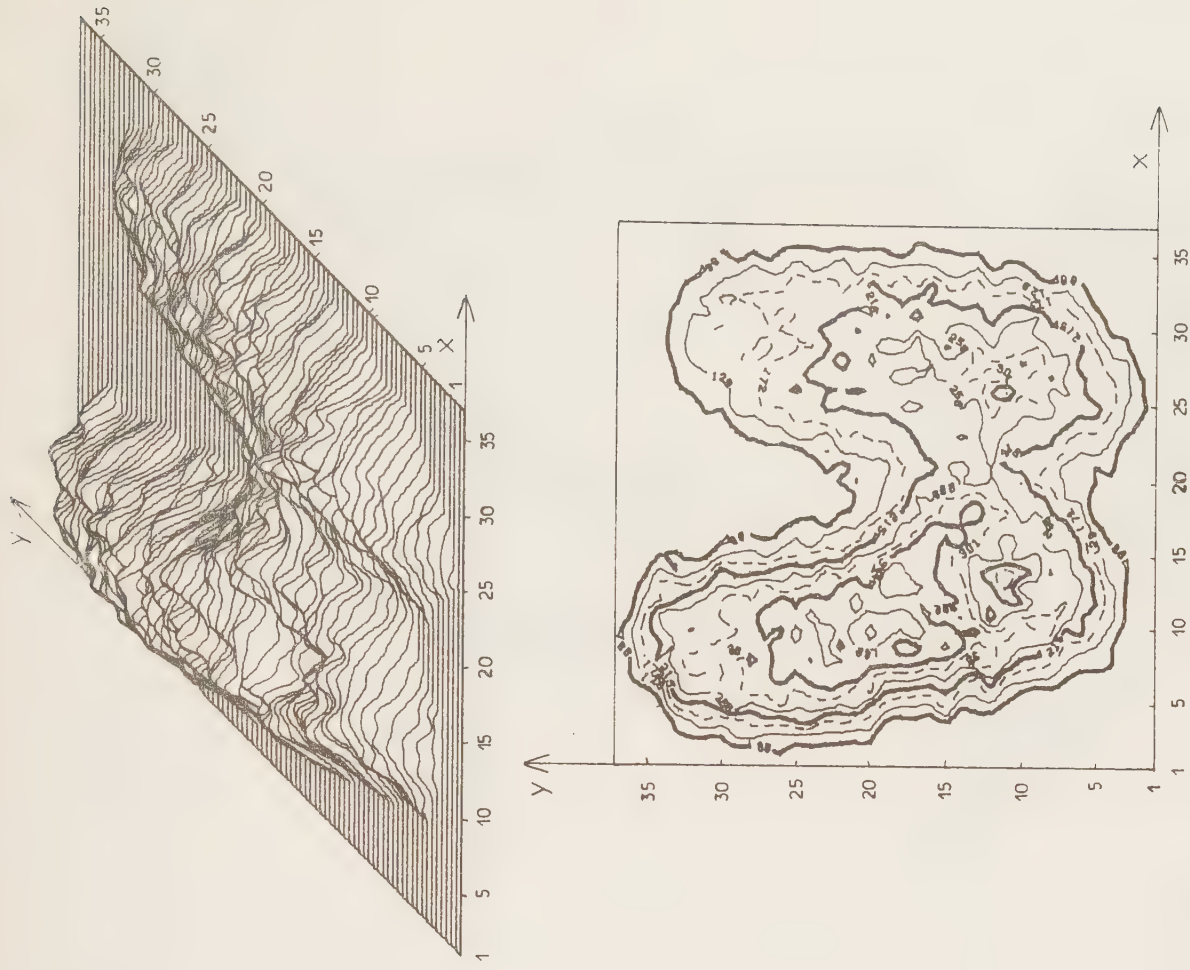


Figure 25. Activité observée brouillée (mesurée) $O(x, y)$

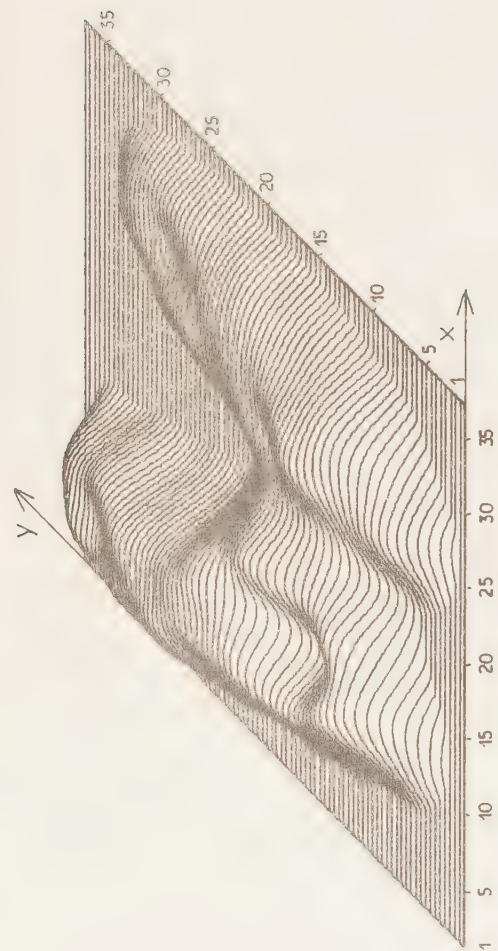


Figure 26. Meilleur résultat obtenu par simple lissage $\bar{O}_{7,7}^C$ avec les degrés 7×7

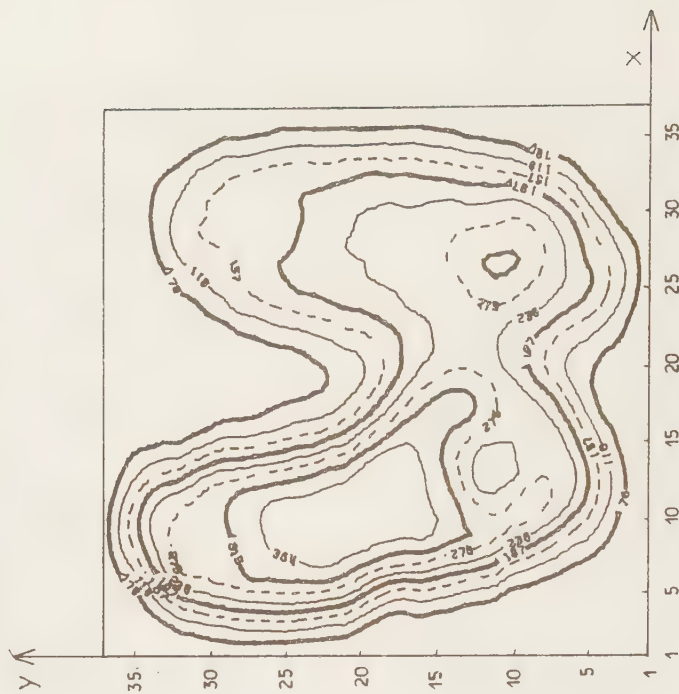
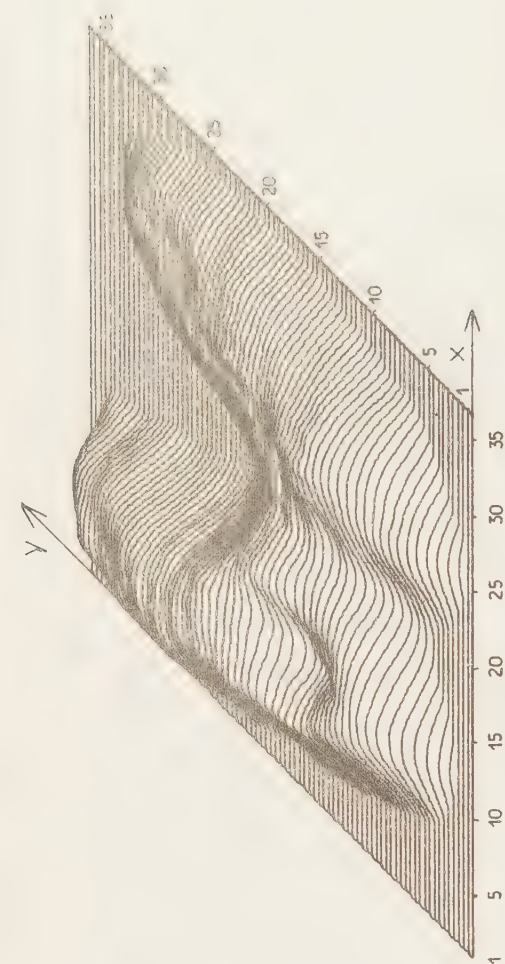


Figure 27. Résultat obtenu par moyennage non pondéré 9 points.

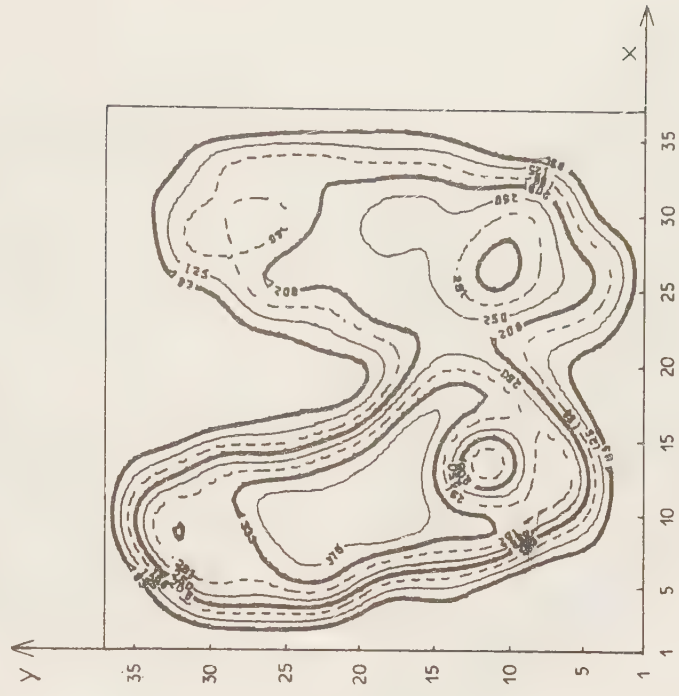
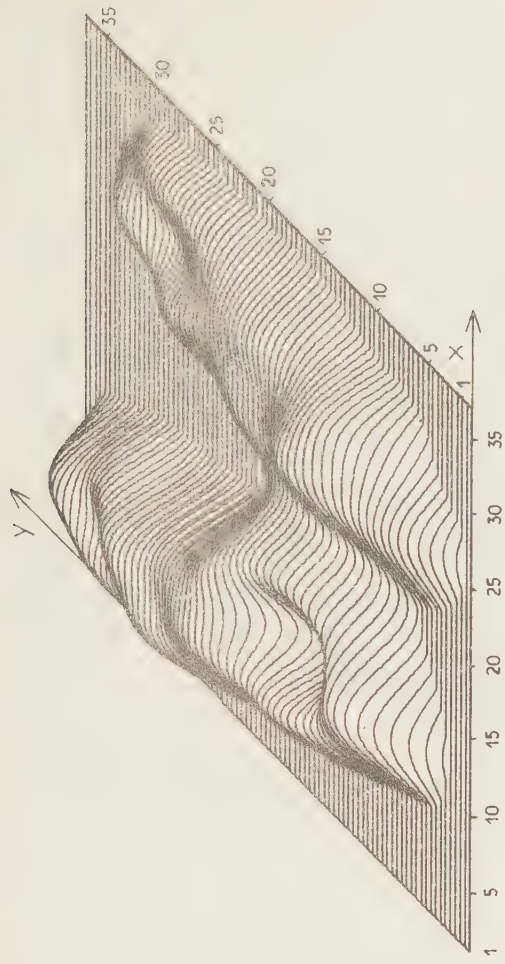


Figure 29. Activité corrigée par notre méthode $\bar{A}^c_{5,5}$ avec les degrés 5×5 .

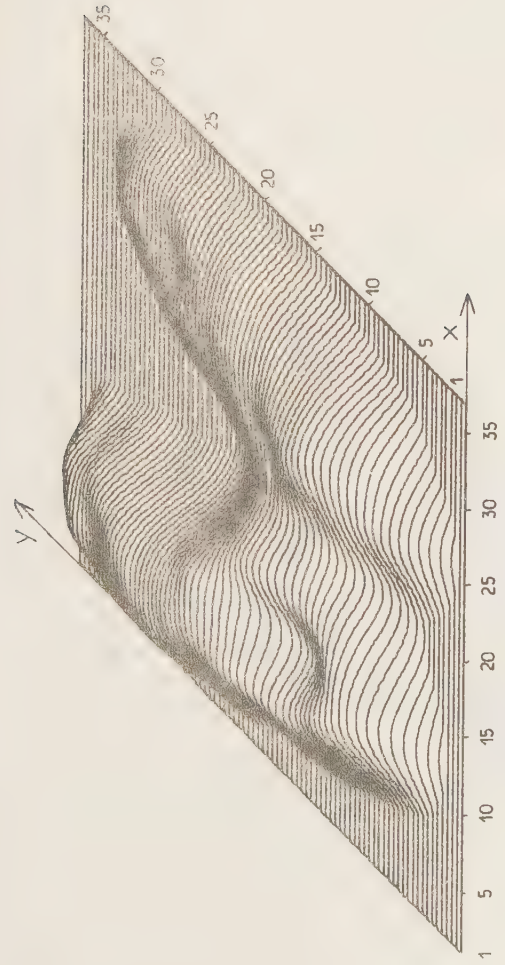


Figure 28. Résultat obtenu par la méthode de Tauxe (cf. paragraphe 21).

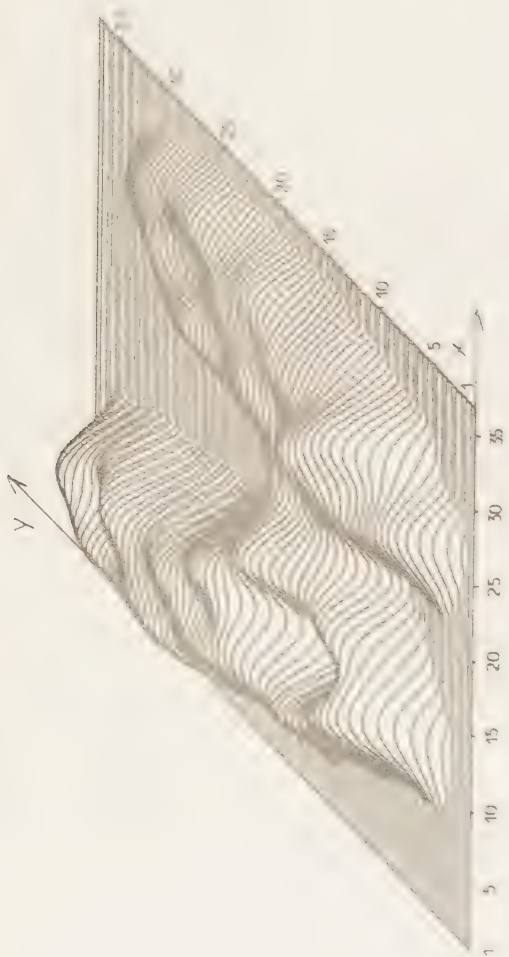


Figure 30. Activité corrigée par notre méthode $\overline{A}_{6,6}^C$ avec les degrés 6×6 .

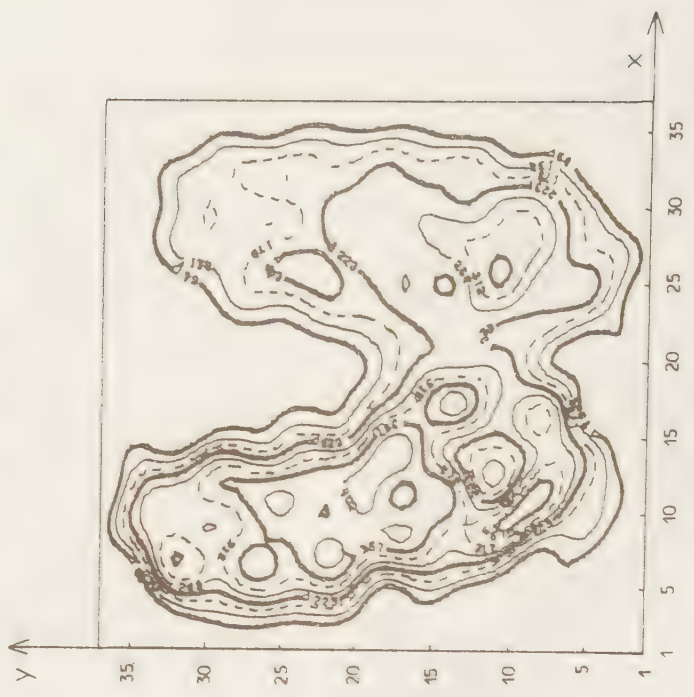
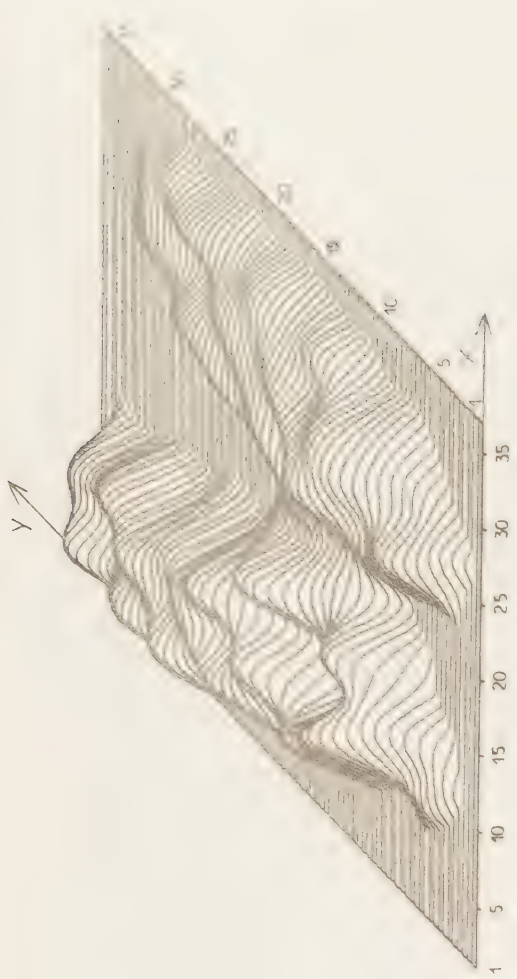


Figure 31. Activité corrigée par notre méthode $\overline{A}_{7,7}^C$ avec les degrés 7×7 .

2. Comparaison de la méthode proposée avec les autres méthodes

Nous ne présentons, dans ce paragraphe, que le cas d'une variable, mais les méthodes qui seront exposées se généralisent sans difficultés au cas de deux ou plusieurs variables.

Rappelons que le problème posé est de trouver d'abord, à partir de la donnée des valeurs de l'activité observée (brouillée) $O(x)$ sur le support :

$$x_i = \frac{i-1}{n} T \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (128)$$

une approximation $\bar{O}^c(x)$ de l'activité observée moyenne $\bar{O}(x)$ et de résoudre ensuite l'équation de convolution approchée :

$$\bar{O}^c(x) = \int_0^T \bar{A}^c(v) \cdot R(x-v) dv \quad (129)$$

21 - RAPPEL DES METHODES CLASSIQUES

Les méthodes de calcul de $\bar{O}^c(x)$ les plus utilisées sont les suivantes :

- (i) le moyennage non pondéré,
- (ii) le moyennage pondéré,
- (iii) et le lissage polynômial (global) au sens des moindres carrés.

La première méthode est la méthode la plus simple. Elle consiste à définir la valeur $\bar{O}^c(x_i)$ comme étant la moyenne arithmétique des valeurs de $O(x)$ au point x_i et en un certain nombre q de points voisins ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Pour $q = 2$, les deux points voisins sont x_{i-1} et x_{i+1} . Ceci correspond dans le cas à deux variables au moyennage 9 points.

Si q est petit, le résultat obtenu peut rester encore illisible (cf. figures 23 et 27). Dans ce dernier cas, on est amené à itérer le processus plusieurs fois (réf. 25, 36).

La deuxième méthode ne diffère de la première que par le fait que les valeurs $O(x_j)$ intervenant dans le calcul de chaque valeur $\bar{O}^c(x_i)$ sont pondérées par des coefficients fixés d'une façon arbitraire (réf. 5, 25 et 36). On peut alors citer, comme un cas particulier de cette méthode, une méthode assez connue, due à Tauxe (réf. 45) qui consiste à prendre, pour coefficient de pondération de chacune des valeurs $O(x_j)$ ci-dessus, la valeur $R(x_j - x_i)$.

Dans la troisième méthode, le temps de calcul dépend assez étroitement de la base employée (réf. 25, 27, 30 et 31). Nous avons vu, au chapitre I, que l'usage de la base des fonctions cosinus et sinus conduit à une technique de calcul très rapide.

Nous ne présentons pas ici l'étude développée de ces méthodes, elle est en effet déjà donnée dans les références indiquées.

Nous allons exposer, dans la suite de ce paragraphe, les principales méthodes de résolution de l'équation (129). Elles peuvent être groupées en deux familles :

- (i) l'usage de la transformée de Fourier (réf. 4, 7, 21, 35, 37, 41 et 43),
- (ii) et la résolution du système d'équations linéaires obtenu en discrétisant l'équation considérée par une des nombreuses méthodes itératives (réf. 10, 16, 22, 23, 30 et 41).

211 - L'USAGE DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER.

Rappelons que la transformée de Fourier $TF(G)(\nu)$ d'une fonction $G(x)$ et la transformée de Fourier inverse $TFI(H)(x)$ d'une fonction $H(\nu)$ sont définies par :

$$\text{TF}(G)(\nu) \stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) \cdot e^{-2\pi i \nu u} du \quad \nu \in \mathbb{R}$$

$$\text{TFI}(H)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu) \cdot e^{2\pi i x \nu} d\nu \quad x \in \mathbb{R}$$

Dans le cas où $G(x)$ est une fonction échantillonnée définie par ses valeurs numériques sur le support (128), on approche la $\text{TF}(G)$ par la "transformée de Fourier discrète" $\text{TFD}(G)$ de $G(x)$ définie par :

$$\text{TFD}(G)(\nu) = \sum_{k=1}^n G(x_k) \cdot e^{-2\pi i \nu x_k} \Delta x \tag{130}$$

Δx étant l'écart $x_{i+1} - x_i = T/n$.

On note alors que $\text{TFD}(G)$ est une fonction périodique de période $1/\Delta x$ ⁽²⁾, c'est-à-dire qu'elle vérifie pour tout entier relatif j :

$$\text{TFD}(G) \left(\nu + \frac{j}{\Delta x} \right) = \text{TFD}(G)(\nu) \quad \forall \nu$$

En effet, il suffit de remarquer dans la relation :

$$\text{TFD}(G) \left(\nu + \frac{j}{\Delta x} \right) = \sum_{k=1}^n G(x_k) \cdot e^{-2\pi i \left(\nu + \frac{j}{\Delta x} \right) x_k} \Delta x$$

que

$$\frac{j x_k}{\Delta x} = \frac{j n}{T} \cdot \frac{(k-1)T}{n} = j(k-1)$$

est un nombre entier pour tous j et k .

Pour connaître toutes les valeurs de $\text{TFD}(G)(\nu)$, il suffit donc de connaître celles-ci sur un intervalle-période quelconque, $\left[0, \frac{1}{\Delta x} \right]$ par exemple.

Introduisons les valeurs de la $\text{TFD}(G)(\nu)$ en n points :

⁽¹⁾ L'ensemble des ν est appelé habituellement le domaine des fréquences.

⁽²⁾ $1/\Delta x$ est appelée fréquence d'échantillonnage et $1/2\Delta x$ fréquence de Nyquist.

$$v_j = \frac{j-1}{T} = \frac{j-1}{n\Delta x} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (131)$$

régulièrement répartis sur l'intervalle-période $[0, 1/\Delta x]$.

On déduit alors de la relation (130) la formule classique :

$$\begin{bmatrix} \text{TFD}(G)(v_1) \\ \text{TFD}(G)(v_2) \\ \vdots \\ \text{TFD}(G)(v_n) \end{bmatrix} = \frac{T}{n} \times [W] \times \begin{bmatrix} G(x_1) \\ G(x_2) \\ \vdots \\ G(x_n) \end{bmatrix} \quad (132)$$

où W est une matrice carrée symétrique de rang n dont l'élément w_{jk} situé au croisement de la $j^{\text{ème}}$ ligne et $k^{\text{ème}}$ colonne est défini par :

$$w_{jk} = e^{-2\pi i(j-1)(k-1)/n} \quad j, k = 1, 2, \dots, n \quad (133)$$

En tenant compte du fait que $e^{-2\pi i x/n}$ est une fonction périodique de période n , la matrice W peut s'écrire sous la forme habituelle :

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \text{-----} & 1 \\ 1 & v^1 & v^2 & \text{-----} & v^{n-1} \\ 1 & v^2 & v^4 & \text{-----} & v^{n-2} \\ \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} \\ 1 & v^{n-1} & v^{n-2} & \text{---} & v^1 \end{bmatrix}$$

dans laquelle :

$$v^\ell = e^{-2\pi i \ell/n} \quad \ell = 1, 2, \dots, n-1$$

De même, on approche la TFI(H) par la "TFI discrète" de H , notée TFID(H) et définie par :

$$\text{TFID}(H)(x) = \sum_{j=1}^n H(v_j) \cdot e^{2\pi i x v_j} \Delta v \quad (134)$$

Δv étant l'écart $v_{j+1} - v_j = 1/T$.

D'où on déduit, en donnant à x , dans cette dernière expression toutes les valeurs x_j du support :

$$\begin{bmatrix} \text{TFID}(H)(x_1) \\ \text{TFID}(H)(x_2) \\ \vdots \\ \text{TFID}(H)(x_n) \end{bmatrix} = \frac{1}{T} \cdot [U] \cdot \begin{bmatrix} H(v_1) \\ H(v_2) \\ \vdots \\ H(v_n) \end{bmatrix} \quad (135)$$

U étant une matrice carrée symétrique de rang n dont l'élément u_{jk} sit sur la $j^{\text{ème}}$ ligne et $k^{\text{ème}}$ colonne est égal à w_{jk}^{-1} pour tous j et k .

La méthode repose sur la formule classique :

$$\text{TF}(\bar{O}^c) = \text{TF}(\bar{A}^c) \cdot \text{TF}(R)$$

de laquelle, on déduit :

$$\bar{A}^c = \text{TFI} \left[\frac{\text{TF}(\bar{O}^c)}{\text{TF}(R)} \right] \quad (136)$$

Dans le cas présent où $\bar{O}^c(x)$ et $\bar{A}^c(x)$ sont des fonctions discrètes, la relation (136) devient, en supposant que l'on sait expliciter l'expression de $\text{TF}(R)$:

$$\bar{A}^c = \text{TFID} \left[\frac{\text{TFD}(\bar{O}^c)}{\text{TF}(R)} \right] \quad (1) \quad (137)$$

Le calcul d'une TFD (ou d'une TFID) demande n^2 multiplications. Cependant, l'introduction des algorithmes de transformation de Fourier rapide par Cooley et Tukey (réf. 12) dans le cas où $n = 2^m$ a permis de réduire le nombre de multiplications à mn . Actuellement, de nombreux travaux (réf. 11, 13, 17, 19 et 46) ont généralisé ces algorithmes au cas

(¹) En raison de la périodicité de TFD, on doit remplacer dans cette formule $\text{TF}(R)(v_j)$, pour $1/2\Delta x < v_j \leq 1/\Delta x$, par la valeur de $\text{TF}(R)$ qui est approchée par $\text{TFD}(R)(v_j)$, c'est-à-dire par $\text{TF}(R)(v_j - \frac{1}{\Delta x})$.

où n est quelconque. Mais, il faut ordonner les valeurs d'une certaine façon avant le calcul de la TFD et les réordonner après le calcul de celle-ci. Néanmoins, certains algorithmes (réf. 19) ont permis d'éviter cet arrangement de valeurs.

Il faut noter, cependant, que le calcul de la TFD peut introduire le phénomène parasite important de "pliage fréquentiel" ("aliasing" des anglo-saxons). Ce phénomène ne peut être négligé que si l'écart Δx entre deux points x_i consécutifs est suffisamment petit de sorte que la valeur de la TF soit voisine de zéro à l'extérieur de l'intervalle $\left[-\frac{1}{2\Delta x}, +\frac{1}{2\Delta x} \right]$ (réf. 4).

Signalons, de plus, que le calcul de $\text{TFD}(\bar{A}^c)(v_j)$ par division de $\text{TFD}(\bar{O}^c)(v_j)$ par $\text{TF}(R)(v_j)$ peut conduire, comme le calcul des coefficients a_i et b_i de $\bar{A}_p^c(x)$ ⁽¹⁾ par division de $(\rho_i c_i + \mu_i d_i)$ et de $(-\mu_i c_i + \rho_i d_i)$ par $(\rho_i^2 + \mu_i^2)$ dans la méthode proposée (cf. paragraphe 1112 du chapitre I), à un résultat totalement aberrant lorsque la fréquence v_j devient assez élevée. Mais si l'ordinateur utilisé dispose d'un nombre suffisant de chiffres significatifs, alors on pourra obtenir le résultat avec une précision aussi grande qu'on le désire. On retrouve donc ici le même phénomène d'instabilité que celui rencontré dans la méthode proposée. Certains auteurs (réf. 21, 42, 49 et 50) ont été alors amenés à annuler les valeurs de ces fonctions à l'extérieur d'un intervalle arbitraire $[-v_m, +v_m]$.

Remarque.

Nous voyons, d'après ce qui précède, que le calcul d'une approche $\bar{A}^c(x)$ de l'activité émise moyenne $\bar{A}(x)$ (inconnue du problème) par la méthode usant de la transformation de Fourier nécessite la connaissance d'une approche $\bar{O}^c(x)$ de $\bar{O}(x)$.

$\bar{A}^c(x)$ peut être aussi obtenu, cependant, en résolvant l'équation de convolution :

(1) La définition de cette fonction est donnée au paragraphe 11 de ce chapitre.

$$\int_0^T A^c(v) \cdot R(x-v) dv = O(x) \quad (138)$$

par la méthode ci-dessus avec annulation des valeurs de $TFD(\bar{A}^c)(v_j)$ (cf. relation (137)) pour les fréquences v_j extérieures à un certain intervalle $[-v_m, +v_m]$, $v_m \leq 1/2\Delta x$ (réf. 4 et 7).

Cette remarque montre qu'on peut grouper en une seule opération le calcul de $\bar{O}^c(x)$ et la résolution de l'équation (129). Le calcul de $\bar{O}^c(x)$ revient donc à l'annulation de $TFD(\bar{A}^c)(v_j)$ pour les fréquences v_j extérieures à l'intervalle $[-v_m, +v_m]$.

212 - RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE DISCRETISE PAR METHODES ITERATIVES.

Nous nous limitons, dans ce paragraphe, au cas où $R(u)$ est une fonction paire. Nous supposons toujours qu'elle est, en outre, nulle à l'extérieur d'un intervalle $[-\alpha, +\alpha]$ avec $2\alpha < T$.

Discrétisons l'équation (129) par la méthode de trapèze généralisée (réf. 30). Nous obtenons alors le système d'équations linéaires :

$$R \cdot A = \Theta \quad (139)$$

où

$$\Theta = \begin{bmatrix} \bar{O}^c(x_1) \\ \bar{O}^c(x_2) \\ \vdots \\ \bar{O}^c(x_n) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \bar{A}^c(x_1) \\ \bar{A}^c(x_2) \\ \vdots \\ \bar{A}^c(x_n) \end{bmatrix}$$

et R est une matrice carrée symétrique de dimension n définie par :

fonction.

Associons au système (139) la forme quadratique :

$$f(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{O}$$

Il est évident que chaque optimum local de $f(\mathbf{A})$ est une solution du système considéré et réciproquement. La résolution du système (139) revient donc à la recherche d'un optimum local de $f(\mathbf{A})$. Les méthodes itératives couramment utilisées pour résoudre ce dernier problème sont la méthode du gradient et ses variantes (réf. 9, 10 et 26).

METHODE DU GRADIENT.

Etant donné un vecteur arbitraire $\mathbf{A}^0$, la méthode du gradient simple est définie par la relation itérative :

$$\mathbf{A}^{r+1} = \mathbf{A}^r + \eta \cdot h_r \cdot \overrightarrow{\text{grad}f}(\mathbf{A}^r)^{(1)} \quad r = 0, 1, \dots, n, \dots \quad (141)$$

où η est une constante égale à +1 ou à -1 suivant que l'optimum recherché de $f(\mathbf{A})$ est un maximum ou un minimum et où h_r (pas) est un réel positif assez petit et choisi pour que la suite $f(\mathbf{A}^r)$ soit strictement monotone (croissante dans le cas d'un maximum et décroissante dans le cas d'un minimum).

Cette méthode est de programmation simple et donne satisfaction dans de nombreux cas. Toutefois, elle présente trois défauts :

(i) elle n'est applicable que si les valeurs propres de $\mathbf{R}$ sont soit toutes réelles non positives, soit toutes réelles non négatives. Dans le premier cas, l'optimum sera un maximum et dans le second cas, il sera un minimum. Si $\mathbf{R}$ admet à la fois des valeurs propres réelles négatives et positives, alors l'optimum considéré sera un "point-selle" (maximum dans certaines directions et minimum dans d'autres) et la méthode du gradient conduit en général à une suite $f(\mathbf{A}^r)$ divergente.

$^{(1)} \overrightarrow{\text{grad}f}(\mathbf{A}^r)$ représente la valeur du gradient de f au point $\mathbf{A}^r$. Il est clair que :

$$\overrightarrow{\text{grad}f}(\mathbf{A}^r) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}^r - \mathbf{O}.$$

(ii) Le choix du pas h_r est très délicat : un pas trop petit alourdit inutilement le calcul (nombre d'itérations trop élevé), un pas trop grand écarte la solution approchée de la solution stricte et augmente, lui aussi, le nombre d'itérations.

(iii) La convergence, si elle a lieu, devient très lente au voisinage de l'optimum lorsque le rapport de conditionnement de $\mathbf{R}$ est élevé.

Les défauts (ii) et (iii) signalés ci-dessus nous conduisent à envisager des méthodes mieux adaptées dont la méthode de suritération de Richardson constitue un bon exemple.

METHODE DE RICHARDSON (réf. 30).

Dans ce paragraphe, nous supposons essentiellement que la matrice $\mathbf{R}$ est diagonalisable et est telle que toutes ses valeurs propres sont réelles et positives.

Soient a et b respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de $\mathbf{R}$.

L'algorithme comporte un certain nombre de cycles d'itérations secondaires.

Description d'une itération secondaire.

Soit $\mathbf{A}^0$ un tableau prenant une valeur arbitraire pour la première itération et qui, pour les autres itérations, est le tableau final de l'itération précédente.

Il s'agit de construire, à partir de ce point $\mathbf{A}^0$, une suite $\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^m$ définie par :

$$\mathbf{A}^r = \mathbf{A}^{r-1} + \frac{c_{r-2}}{c_r} [\mathbf{A}^{r-1} - \mathbf{A}^{r-2}] + \frac{4}{b-a} \cdot \frac{c_{r-1}}{c_r} [\mathbf{0} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}^{r-1}]$$

pour $r = 2, 3, \dots, m$ avec :

(142)

$$\mathbf{A}^1 = \left[\mathbf{I} - \frac{2}{a+b} \mathbf{R} \right] \cdot \mathbf{A}^0 + \frac{2}{a+b} \cdot \Theta \quad (143)$$

Dans ces dernières relations $c_0, c_1, \dots, c_m$ est une suite de nombres réels définis par la relation de récurrence :

$$c_r = 2 \frac{a+b}{b-a} c_{r-1} - c_{r-2}$$

avec

$$c_0 = 1 \text{ et } c_1 = \frac{a+b}{b-a}.$$

Chaque passage de $\mathbf{A}^r$ à $\mathbf{A}^{r+1}$ est appelé une itération primaire. On notera que le nombre d'itérations primaires m peut varier d'une itération secondaire à l'autre.

De plus, les relations (142) et (143) montrent que la méthode de Richardson est de programmation presque aussi simple que celle de la méthode du gradient simple.

Nous allons montrer, à présent, dans la remarque ci-dessous, que la condition que toutes les valeurs propres de $\mathbf{R}$ soient réelles et positives est satisfaite dans le cas $R(u)$ est la fonction de Gauss envisagée au paragraphe 12 de ce chapitre.

On peut signaler, cependant, que quelle que soit la définition de la fonction $R(u)$, toutes les valeurs propres de $\mathbf{R}$ sont toujours réelles. Ceci est une conséquence évidente du fait que cette matrice $\mathbf{R}$ est toujours symétrique.

Remarque.

Considérons la fonction $R(u)$ envisagée dans des paragraphes précédents :

$$R(u) = \sqrt{\frac{c}{\pi}} e^{-cu^2} \quad (1) \quad u \in \mathbb{R}$$

(1) Le coefficient $\sqrt{\frac{c}{\pi}}$ est le facteur de normalisation de $R(u)$,

$$\sqrt{\frac{\pi}{c}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-cu^2} du$$

où $c = 2,8/(K\Delta x)^2$ est déterminé pour que sa LMH soit égale à $K\Delta x$.

Comme cette fonction tend rapidement vers zéro quand u tend vers l'infini, nous pouvons négliger ses valeurs à l'extérieur d'un intervalle assez grand $[-\alpha, +\alpha]$ (qui dépend évidemment de K).

Le tableau 4 présente les valeurs propres extrêmes (calculées en double précision par une méthode décrite dans la référence 30) de $\mathbb{R}$ pour différentes valeurs de K et pour $n = 61$.

Tableau 4 - Valeurs propres extrêmes de $\mathbb{R}$

K	2	3	4	5	6
Minimum	0,060	0,002	0,004	0,025	0,04
Maximum	1	0,997	0,996	0,994	0,992

Ce tableau nous montre que toutes les valeurs propres de $\mathbb{R}$ sont réelles et positives.

Cependant, il faut noter qu'une mauvaise troncature de $R(u)$ (c'est-à-dire un mauvais choix de α) peut introduire des valeurs propres négatives, petites en valeur absolue et rend, par conséquent, la méthode du gradient simple et celle de Richardson inapplicables. Cet inconvénient a été rencontré également, dans certains cas, lorsque $R(u)$ est une fonction discrète déterminée expérimentalement et qui est voisine d'une fonction de Gauss (réf. 22). Ceci est traduit, dans l'application pratique, par la divergence du procédé.

Dans ce dernier cas, on peut pallier à ce défaut en utilisant la technique suivante :

STABILISATION D'UN SYSTEME LINEAIRE MAL CONDITIONNE
(réf. 9, 32).

Considérons le système (139). Appelons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de R et supposons que $\text{Min} \lambda_i$ est négatif mais petit en valeur absolue.

La technique consiste à approcher le système considéré par le système suivant :

$$R_\varepsilon \cdot A_\varepsilon = 0 \quad (144)$$

où $R_\varepsilon = R + \varepsilon I$ avec $\varepsilon > |\text{Min} \lambda_i|$ (par exemple si $\text{Min} \lambda_i = -0,003$, on pourrait choisir $\varepsilon = 0,004$).

Comme R_ε admet pour valeurs propres $\lambda_1 + \varepsilon, \lambda_2 + \varepsilon, \dots, \lambda_n + \varepsilon$ (réf. 30), elle est donc définie positive. On peut donc appliquer au système (144) une des méthodes itératives indiquées précédemment.

D'autre part, pour presque toutes les méthodes itératives, la vitesse de convergence au voisinage de la solution est inversement proportionnelle à la valeur du rapport de conditionnement de la matrice qui détermine le système. Il faudra donc choisir ε pour que, de plus, le rapport de conditionnement de R_ε ne soit pas trop élevé.

Cependant, elle introduit une erreur systématique :

$$D = A - A_\varepsilon$$

On vérifie aisément que :

$$D = \varepsilon R_\varepsilon^{-1} \cdot A$$

Elle n'est donc intéressante que si tous les éléments de $\varepsilon R_\varepsilon^{-1}$ sont voisins de zéro. Sous cette dernière condition, on peut améliorer la solution approchée en résolvant successivement les systèmes :

$$\begin{aligned} R_\varepsilon \cdot A_1 &= 0 \\ R_\varepsilon \cdot A_2 &= 0 + \varepsilon(A_1 + E_1) \\ R_\varepsilon \cdot A_3 &= 0 + \varepsilon(A_2 + E_2) \\ &\dots \\ R_\varepsilon \cdot A_n &= 0 + \varepsilon(A_{n-1} + E_{n-1}) \end{aligned}$$

où E_i est l'écart entre la solution stricte $\bar{A}_i$ et la solution approchée $(\bar{A}_i + E_i)$ obtenue lors de la résolution du $i^{\text{ème}}$ système.

Si $E_i \simeq 0$ pour tout i , on démontre par un calcul élémentaire que l'écart entre $\bar{A}_n$ et la solution stricte $\bar{A}$ du système (139) est :

$$\bar{A} - \bar{A}_n = (\varepsilon R_\varepsilon^{-1})^n \cdot \bar{A}$$

On peut noter, enfin, que cette technique peut être utilisée également, dans le cas où toutes les valeurs propres λ_i sont positives, pour baisser la valeur du rapport de conditionnement de R et accélérer, par conséquent, la convergence du procédé itératif employé.

22. - COMPARAISON DE LA METHODE PROPOSEE AVEC LES METHODES CLASSIQUES.

221 - COMPARAISON AVEC LA METHODE USANT DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER

Nous voyons, d'après les remarques données aux paragraphes 11 et 211 de ce chapitre, que dans la méthode proposée et celle usant de la transformation de Fourier, on peut grouper en une seule opération le lissage traduit par la troncature des termes d'harmonies élevées et la correction de résolution du collimateur. Nous remarquons, de plus, que le second membre de l'équation (138) introduite par cette dernière méthode est la restriction à l'intervalle $[0, T]$ de celui de l'équation (124) introduite par la méthode proposée.

Nous allons démontrer maintenant, dans le cas où nous n'effectuons pas la troncature indiquée, le résultat important suivant :

Théorème 28. Si n est impair, alors la méthode proposée et celle usant de la transformation de Fourier conduisent au même résultat final.

Démonstration.

En effet, on a en vertu des formules (130) et (134) :

$$\text{TFD}(\mathcal{O})(v_\ell) = \frac{T}{n} \sum_{k=1}^n \mathcal{O}(x_k) \cdot e^{-2\pi i v_\ell x_k} \quad \ell = 1, 2, \dots, n$$

$$A^c(x_j) = \frac{1}{T} \sum_{\ell=1}^n \text{TFD}(A^c)(v_\ell) \cdot e^{2\pi i x_j v_\ell} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Mais (cf. paragraphe 211) :

$$\text{TFD}(A^c)(v_\ell) = \frac{\text{TFD}(\mathcal{O})(v_\ell)}{\text{TF}(R)(v'_\ell)}$$

avec

$$v'_\ell = \begin{cases} v_\ell & \text{si } 0 \leq v_\ell \leq \frac{1}{2\Delta x} \\ v_\ell - \frac{1}{\Delta x} & \text{si } \frac{1}{2\Delta x} < v_\ell < \frac{1}{\Delta x} \end{cases} \quad (145)$$

On a donc :

$$A^c(x_j) = \frac{1}{T} \sum_{\ell=1}^n \frac{\text{TFD}(\mathcal{O})(v_\ell)}{\text{TF}(R)(v'_\ell)} \cdot e^{2\pi i x_j v_\ell}$$

D'où en remplaçant $\text{TFD}(\mathcal{O})(v_\ell)$ par sa valeur :

$$A^c(x_j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \mathcal{O}(x_k) \cdot \frac{e^{2\pi i v_\ell (x_j - x_k)}}{\text{TF}(R)(v'_\ell)} \quad (146)$$

Posons :

$$\gamma_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \frac{e^{2\pi i v_\ell (x_j - x_k)}}{\text{TF}(R)(v'_\ell)} \quad j, k = 1, 2, \dots, n \quad (147)$$

La relation (146) s'écrit alors :

$$A^c(x_j) = \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} \cdot O(x_k)$$

Posons :

$$m = \frac{n-1}{2}$$

Il ne nous reste donc qu'à démontrer que γ_{jk} est égal à φ_{ij}^m défini par la relation (20).

En effet, substituons dans la relation (146), x_j , x_k , v_ℓ et v'_ℓ par leurs valeurs respectives données par les relations (128), (131) et (145). Nous obtenons alors, par un calcul élémentaire, puisque n est impair :

$$\gamma_{jk} = \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{TF(R)(0)} + \sum_{\ell=1}^m \left[\frac{e^{2\pi i \ell(j-k)/n}}{TF(R)(\frac{\ell}{T})} + \frac{e^{-2\pi i \ell(j-k)/n}}{TF(R)(-\frac{\ell}{T})} \right] \right\}$$

D'autre part, on a en vertu des relations (9) :

$$\begin{cases} TF(R)(0) &= \rho_0 \\ TF(R)(\frac{\ell}{T}) &= \rho_\ell - i\mu_\ell & \forall \ell = 1, 2, \dots \\ TF(R)(-\frac{\ell}{T}) &= \rho_\ell + i\mu_\ell & \forall \ell = 1, 2, \dots \end{cases}$$

On vérifie alors aisément que :

$$\begin{aligned} \gamma_{jk} &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{\rho_0} + 2 \sum_{\ell=1}^m \frac{1}{\rho_\ell^2 + \mu_\ell^2} \left[\rho_\ell \cos \frac{2\pi \ell |j-k|}{n} - \mu_\ell \sin \frac{2\pi \ell (j-k)}{n} \right] \right\} \\ &= \varphi_{jk}^m \end{aligned} \tag{148}$$

(C. Q. F. D.)

Une conséquence immédiate de ce dernier théorème est la suivante :

Théorème 29.

(i) On suppose que n est impair. L'annulation, dans la méthode utilisant la TF, des valeurs de $\text{TFD}(A^c)(\frac{\ell}{T})$ pour tout entier $\ell \notin [-p, +p]$ ($p \leq (n-1)/2$) revient à tronquer, dans la méthode proposée, la solution obtenue à l'ordre p et inversement.

(ii) Le résultat (i) s'étend au cas où n est de parité quelconque pourvu que $2p+1 \leq n$.

Démonstration.

Démontrons d'abord l'assertion (i). En effet, il suffit de remarquer que l'annulation, dans la méthode utilisant la TF, des valeurs de $\text{TFD}(A^c)(\frac{\ell}{T})$ pour tout entier $\ell \notin [-p, +p]$ ($p \leq (n-1)/2$) et la troncature, dans la méthode proposée, de la solution obtenue à l'ordre p reviennent toutes les deux à retrancher simplement de l'expression (148) les termes en ρ_ℓ et μ_ℓ pour $\ell = p+1, p+2, \dots, \frac{n-1}{2}$.

L'assertion (ii) est une conséquence évidente du fait que les deux méthodes considérées s'étendent au cas où n est de parité quelconque sous la seule condition que $2p+1 \leq n$.

Nous divisons cette étude comparative en deux parties : la première porte sur les formulations mathématiques et la seconde sur le traitement algorithmique.

FORMULATIONS MATHÉMATIQUES.

La méthode proposée et celle utilisant la TF présentent les

ressemblances suivantes :

(1) La méthode proposée utilise la base des fonctions cosinus et sinus. La méthode basée sur la TF fait intervenir explicitement les fonctions exponentielles complexes dont les parties réelle et imaginaire ne sont rien d'autres que les fonctions cosinus et sinus.

(2) La méthode proposée utilise la technique de résolution des équations de convolution à second membre périodique décrite dans le chapitre I et introduit, par conséquent, des effets de bords (cf. paragraphe 11 de ce chapitre). La méthode usant de la TF introduit le phénomène de pliage fréquentiel (cf. paragraphe 211 de ce chapitre).

(3) Elles nécessitent toutes deux l'annulation systématique des termes en ρ_ℓ et μ_ℓ pour ℓ supérieur à une valeur p telle que $2p+1 \leq n$ et le choix optimal de cette valeur p est très délicat.

(4) Elles conduisent, d'après les résultats des théorèmes 28 et 29 non envisagés par les autres auteurs, au même résultat final.

Toutefois, elles présentent les différences suivantes :

(1) La méthode usant de la TF introduit, au cours du traitement, la discrétisation de $O(x)$, de $TF(O)(v)$, de $TF(A^C)(v)$ et de $A^C(x)$ dont l'influence est difficile à étudier.

(2) Dans la méthode proposée, nous limitons le champ de calculs à la classe des fonctions :

$$c_0 + \sum_{j=1}^q (c_j \cos j\omega x + d_j \sin j\omega x) \quad \text{avec } 2q+1 \leq n$$

et approchons l'équation de convolution de départ par une équation de convolution à second membre périodique que nous savons résoudre strictement si celui-ci est effectivement une fonction de cette classe.

Sous cette dernière condition, on montre que la troncature de la solution obtenue à un ordre $p \leq q$ revient à approcher cette solution au

sens des moindres carrés sur le support $x_1, x_2, \dots, x_n$ et dans la base

$$1, \cos \omega x, \sin \omega x, \dots, \cos p\omega x, \sin p\omega x.$$

TRAITEMENT ALGORITHMIQUE.

Sur ce plan, les deux méthodes sont strictement différentes.

En effet, la méthode usant de la TF présente trois phases : le calcul de $\text{TFD}(O)(v_\ell)$, la division de celle-ci par $\text{TF}(R)(v_\ell)$ pour obtenir $\text{TFD}(A^c)(v_\ell)$ et le retour à $A^c(x_j)$ par le calcul de la TFID de $\text{TFD}(A^c)(v_\ell)$.

Dans la méthode proposée, le calcul des valeurs $A_p(x_j)$ se fait directement à partir de la formule :

$$A_p(x_j) = \sum_{k=1}^P [X_p^{(k-j)} + Y_p^{(k-j)}] \cdot O(x_k)$$

où

$$\begin{cases} X_p(t) &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{p_0} + 2 \sum_{j=1}^P \frac{p_j}{p_j^2 + \mu_j^2} \cos \frac{2\pi j t}{n} \right) \\ Y_p(t) &= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^P \frac{\mu_j}{p_j^2 + \mu_j^2} \sin \frac{2\pi j t}{n} \end{cases}$$

qui regroupe donc en un seul calcul les trois phases précédentes.

D'autre part, la méthode proposée introduit dans le cas d'interpolation la contrainte que n soit impair. Mais, dans le cas présent où nous devons effectuer toujours une certaine troncature, cette dernière condition n'est plus indispensable.

La méthode basée sur la TF n'introduit, au départ, aucune contrainte de support. Mais, pour pouvoir utiliser les algorithmes de transformation de Fourier rapide, elle introduit la contrainte que n soit décomposable en un produit de facteurs premiers :

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_s^{r_s} \quad p_i \neq 1 \quad \forall i$$

qui est une condition assez restrictive. Le calcul de la TF sera d'autant plus rapide que les facteurs p_i seront plus petits. Dans le cas limite où $n = 2^q$, le calcul de la TF demande nq multiplications complexes, c'est-à-dire $4 nq$ multiplications réelles puisqu'une multiplication complexe demande quatre multiplications réelles (sans compter le nombre d'additions). La méthode usant de la TF nécessite donc, comme on calcule une TFD et une TFID, $8 nq$ multiplications réelles.

Il est évident que, dans le cas général où $R(u)$ est une fonction quelconque, la méthode proposée demande n^2 multiplications réelles. Elle paraît donc, pour $n \geq 64$ (condition qui implique que $n^2 \geq 8 nq$), moins avantageuse que celle basée sur la TF. Mais il n'en est pas ainsi car les calculs en arrière plan sont bien plus simples dans la méthode proposée que dans l'autre.

On peut noter que, dans le cas où $R(u)$ est une fonction paire, la méthode proposée ne demande que $n^2/2$ multiplications réelles (cf. paragraphe 112 du chapitre I). L'hypothèse que $R(u)$ est paire réduit donc, dans le cas d'une variable, le volume de calcul total à peu près de moitié. Dans cette condition, on remarque que :

$$8 nq \leq \frac{n^2}{2} \iff 128 \leq n$$

or, dans les problèmes pratiques, n ne dépasse presque jamais 128.

CONSEQUENCES.

La méthode proposée nécessite une programmation beaucoup plus simple et plus courte que celle demandée par la méthode basée sur la TF.

Elle est, en outre, une méthode très rapide : dans les problèmes à deux variables où $R(u, v)$ est une fonction de Gauss ⁽¹⁾, le temps

⁽¹⁾ C'est le cas le plus favorable pour notre méthode car cette fonction est paire par rapport à chacune des variables u et v égale au produit tensoriel de deux fonctions d'une variable. Nous avons vu que c'est aussi le cas rencontré généralement dans les problèmes concrets.

de calcul pour une matrice de 37×37 valeurs est, quelque soient les degrés du polynôme, de 0,03 minute sur l'ordinateur CII - 10070 du Centre de Calcul de Nancy. Ce temps est multiplié par un facteur voisin de 8 lorsqu'on double les dimensions de la matrice considérée, soit de 0,20 minute pour une matrice de 65×65 valeurs. De plus, comme les effets de bords n'altèrent pas les résultats obtenus après traitement si les valeurs mesurées au voisinage du contour sont assez faibles par rapport aux valeurs intéressantes (cf. paragraphe 122 de ce chapitre), on peut réduire la durée de calcul en éliminant avant le traitement toutes les lignes et les colonnes externes constituées uniquement de valeurs inférieures à un certain pourcentage choisi (par exemple 10 %) de la valeur mesurée maximale.

Le temps de calcul pour la méthode basée sur la TF, en utilisant l'algorithme de transformation de Fourier rapide dû à Glassman ⁽¹⁾, pour une matrice de 64×64 ⁽²⁾ valeurs est de 2,5 minutes, soit à peu près 12 fois plus long que celui de la méthode proposée.

222 - COMPARAISON AVEC LES METHODES ITERATIVES.

Comme, dans le paragraphe 221, nous divisons cette étude également en deux parties : la première est consacrée aux formulations mathématiques et la seconde au traitement algorithmique.

FORMULATIONS MATHÉMATIQUES

Pour simplifier notre exposé nous nous limitons au cas où $R(u)$ est une fonction paire mais les résultats que nous allons présenter

⁽¹⁾ Cet algorithme ne demande pas l'arrangement des valeurs avant le calcul de la TFD et le réarrangement après le calcul de celle-ci (réf. 19).

⁽²⁾ Ces dimensions sont des puissances de 2. Nous sommes donc placés dans le cas le plus favorable pour cet algorithme.

restent encore valables dans le cas où $R(u)$ est une fonction quelconque.

Considérons, d'abord, le cas où il n'y a pas de fluctuations statistiques et où n est impair ⁽¹⁾.

Posons :

$$m = \frac{n-1}{2}$$

La méthode proposée consiste à approcher l'équation de convolution considérée par une équation de convolution à second membre périodique puis cette dernière par le système d'équations linéaires (cf. paragraphe 21 du chapitre I) :

$$\Lambda \cdot R = \Theta \quad (149)$$

où

$$R = \begin{bmatrix} A(x_1) \\ A(x_2) \\ \vdots \\ A(x_n) \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} O(x_1) \\ O(x_2) \\ \vdots \\ O(x_n) \end{bmatrix}$$

et :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_m & s_m & \dots & s_2 & s_1 \\ s_1 & s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_m & s_m & \textcircled{1} & s_2 \\ s_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_m & \dots & \dots & \dots & \textcircled{2} & \dots & \dots & \dots & s_m \\ s_m & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & s_2 \\ s_2 & \textcircled{3} & s_m & s_m & \dots & s_2 & s_1 & s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_m & s_m & \dots & s_2 & s_1 & s_0 \end{bmatrix}$$

⁽¹⁾ Cette dernière condition n'est indispensable que pour l'interpolation.

avec

$$s_j = \frac{1}{n} \left(\rho_0 + 2 \sum_{i=1}^m \rho_i \cos \frac{2\pi i j}{n} \right) \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (151)$$

L'intérêt essentiel de notre méthode est que nous sachions expliciter le calcul des éléments de $\mathcal{A}^{-1}$ par une formalisation stricte bien adaptée au traitement numérique.

Dans les méthodes itératives, le système linéaire considéré s'écrit (cf. paragraphe 212 de ce chapitre) :

$$\mathcal{R} \cdot \mathcal{A} = 0 \quad (152)$$

$\mathcal{R}$ étant la matrice définie par la relation (140).

Soit $R_T(u)$ une fonction égale à $R(u)$ ⁽¹⁾ sur l'intervalle $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$ et prolongée sur la droite réelle $\mathbb{R}$ de façon à être périodique de période T . Appelons $S(u)$ le développement en série trigonométrique limité à l'ordre m de $R_T(u)$ (réf. 43).

Il est clair que :

$$e_j = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} R(x) \cos \frac{2\pi j x}{T} dx = r_j, \quad j = 0, 1, \dots, k-1; k \leq m$$

On voit donc que les deux matrices $\mathcal{A}$ et $\mathcal{R}$ ne se diffèrent essentiellement que par leurs éléments situés dans les régions ① et ③ indiquées dans la relation (150) et que, de plus, l'usage dans la méthode proposée des représentations approchées de $A(x)$ et de $O(x)$ par des polynômes trigonométriques de degré m (interpolation) revient à développer $R_T(u)$ en série trigonométrique limitée au même ordre m ; l'apparition dans les régions ① et ③ des éléments non nuls de $\mathcal{A}$ provient de la périodicité des représentations approchées utilisées.

La méthode proposée présente l'inconvénient qu'elle n'est applicable que si la solution $A(x)$ est faible à l'extérieur de l'intervalle

⁽¹⁾ Nous supposons toujours que $R(u)$ est nulle à l'extérieur de l'intervalle $[-\alpha, +\alpha]$ avec $2\alpha \leq T$, inégalité qui implique que $k \leq m$.

$[\alpha, T-\alpha]$ alors que, pour les méthodes itératives, cette condition n'est pas du tout nécessaire.

Dans les problèmes pratiques où les valeurs mesurées sont brouillées par la présence des fluctuations statistiques, il est indispensable d'effectuer avant la résolution du système linéaire un certain lissage. Signalons, cependant, que la méthode proposée et celle usant de la TF permettent de grouper en un seul calcul les deux opérations indiquées, alors que, pour les méthodes itératives, celles-ci sont restées bien séparées. De plus, il est difficile, pour ces dernières méthodes, d'étudier l'influence du nombre d'itérations employé. Rappelons, toutefois, que, pour la méthode proposée, le lissage est traduit pas la troncature de la solution $A(x)$ du système (149) à un ordre p et le résultat obtenu est la meilleure approximation au sens des moindres carrés de $A(x)$ sur le support $x_1, x_2, \dots, x_n$ et dans la base

$$1, \cos \omega x, \sin \omega x, \dots, \cos p\omega x, \sin p\omega x.$$

TRAITEMENT ALGORITHMIQUE.

Nous avons vu au paragraphe 221 de ce chapitre que la méthode proposée est une méthode rapide basée sur des formulations mathématiques simples et bien adaptées au traitement numérique.

Quant aux méthodes itératives, on doit faire précéder la résolution du système linéaire considéré par un certain lissage.

De plus, pour la classe de problèmes que nous avons à résoudre, le système indiqué est en général un système instable de sorte que sa résolution nécessite un nombre d'itérations élevé. Nous illustrons cette affirmation par les résultats obtenus par la méthode de Linuma et Nagat (réf. 22) ⁽¹⁾ et celle de Richardson ⁽²⁾ dans le cas où il n'y a pas de

⁽¹⁾ On vérifie aisément que cette méthode, qui est assez connue dans le domaine de la scintigraphie, n'est qu'un cas particulier de la méthode du gradient définie par la relation itérative (141) où $\eta = -1$, $\mathbf{A}^0 = \mathbf{0}$ et où le pas h_r est fixé égal constamment à +1.

2

Nous n'effectuons ici qu'une seule itération secondaire.

Tableau 5. - Ecart relatif moyen ⁽¹⁾ entre la solution stricte et la solution approchée obtenue.

Nombre d'itérations	K = 2		K = 3		K = 5	
	Méthode de Richardson	Méthode de Inuma et Nagat	Méthode de Richardson	Méthode de Inuma et Nagat	Méthode de Richardson	Méthode de Inuma et Nagat
0	7.10^{-2}	7.10^{-2}	10^{-1}	10^{-1}	2.10^{-1}	2.10^{-1}
1	3.10^{-2}	4.10^{-2}	8.10^{-2}	"	"	"
3	2.10^{-2}	2.10^{-2}	10^{-1}	"	"	"
5	8.10^{-3}	"	"	7.10^{-2}	"	10^{-1}
10	2.10^{-3}	10^{-2}	"	6.10^{-2}	6.10^{-2}	"
15	2.10^{-4}	7.10^{-3}	7.10^{-2}	"	5.10^{-2}	"
20	2.10^{-5}	5.10^{-3}	"	5.10^{-2}	4.10^{-2}	"
30	7.10^{-7}	3.10^{-3}	3.10^{-2}	4.10^{-2}	"	9.10^{-2}
40		10^{-3}	10^{-2}	"	"	"
50		7.10^{-4}	7.10^{-3}	3.10^{-2}	"	"
70				"	"	8.10^{-2}
100				"	"	"

⁽¹⁾ Nous définissons l'écart relatif moyen entre une fonction A(x) et son approche B(x), la valeur

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{A(x_i) - B(x_i)}{A(x_i)} \right|$$

$A(x_i) \neq 0$

fluctuations statistiques (cf. tableau 5). Dans ces essais, nous avons choisi, comme solution stricte $A(x)$, la fonction utilisée par Iinuma et Nagai et représentée dans la figure 3 (page 70) et comme $R(u)$, celle définie dans la remarque du paragraphe 212 de ce chapitre ; n est fixé égal à 61. Les valeurs de $O(x)$ sur le support $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont définies par la relation :

$$\textcircled{R} = R \cdot A$$

Le tableau 5 nous montre que la méthode de Richardson et celle de Iinuma et Nagai pourraient être utilisées pour $K \leq 2$, à la limite pour $K = 3$ mais deviennent, au contraire, trop coûteuses (nombre d'itérations trop élevé) et, par conséquent, inapplicables pour $K > 3$.

On remarque, enfin, que lorsque ces deux méthodes sont applicables, la méthode de Richardson est plus avantageuse que celle de Iinuma et Nagai.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 - BARBER, D.C., and MALLARD, J.R., Data Processing of Radioisotope Images for Optimum Smoothing, Phys. Med. Biol. Vol.16, 1971, p. 635-644.
- 2 - BASS, J., Eléments de calcul des probabilités théorique et appliqué, Masson, Paris 1967.
- 3 - BELLMANN, Introduction to matrix analysis, Mac Graw Hill, 1960.
- 4 - BERCHE, C., et DI PAOLA, R., Analyse fréquentielle et filtrage des images scintigraphiques, I-Généralité, J. de Biol. et de Med. Nucl., A.T.E.N., n° 36, 1974, p. 16-28.
- 5 - BERCHE, C., et DI PAOLA R., Analyse fréquentielle et filtrage des images scintigraphiques, II-Filtres linéaires invariants indépendants du système, J. de Biol. et de Med. Nucl., A.T.E.N., n° 37, 1974, p. 16-39.
- 6 - BERCHE, C., TODD-POKROPEK, A.E., et DI PAOLA, R., Preliminary results on the use of the Hadamard transform.
- 7 - BROWN, D.W., KIRCH, D.L., RYERSON, T.W., THROCKMORTON, A.J., KILBOURN, A.L., and BRENNER, N.M., Computer processing of scans using Fourier and other transformations, J. of Nucl. Med., Vol.12, 1971, p. 287-291.
- 8 - BROWNELL, G.L., Spatial Resolution dans Fundamental problems in scanning, Charles C. T. Publisher, 1968, p. 40-49.
- 9 - CEA, J., Optimisation : théorie et algorithmes, Dunod, Paris, 1971.
- 10 - CHAU, N., Optimisation par une méthode du gradient avec accélération de la convergence - Problèmes avec contraintes, thèse 3ème cycle, Université de Nancy I, 1972.

- 11 - COFFY, J., Description d'algorithmes de transformation de Fourier rapide, dans contributions à la théorie des systèmes, cahier de l'IRIA, n° 3, 1970, p. 171-200.
- 12 - COOLEY, J.W., and TUKEY, J.W., An algorithm for the machine calculation of complex Fourier Series, Math comp., Vol. 19, 1965, p. 297-301.
- 13 - DEPEYROT, M., Fondements algébriques de la transformation de Fourier rapide, dans contributions à la théorie des systèmes, Cahier de l'IRIA, n° 3, 1970, p. 23-170.
- 14 - DI PAOLA, R., ALBAREDE, P., PATAU, J.P., et TUBIANA, M., Correction de la réponse du détecteur collimaté. Application à la scintigraphie, C.R. Acad. Sc., t. 263, Série D, Paris, 1966, p. 1160-1163.
- 15 - DI PAOLA, R. ALBAREDE, P., et TUBIANA, M., The correction of resolution in scintigraphy, I.A.E.A. Symposium on Medical radio-isotope scintigraphy, Salzburg, 1968.
- 16 - GASTINEL, N., Analyse numérique linéaire, Hermann, Paris, 1966.
- 17 - GENTLEMAN, W.M., et SANDE, G., Fast Fourier Transforms of Fun and Profit. Fall Joint computer conf. AFIPS Proc., Vol. 29, Washington D.C., Spartan, 1966, p. 563-578.
- 18 - GEORGI, P.T., Fourier series, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, NEW Jersey, 1962.
- 19 - GLASSMAN, J.A., A Generalisation of the Fast Fourier Transform, IEEE Transaction on computers, Vol. C. 19, 1970, p. 105-116.
- 20 - HAROLD, S.S., Topic in approximation theory, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1971.

- 21 - HARRIS, J.L., Image evaluation and restoration, J. Opt. Soc. Am. 56 : 569, 1966.
- 22 - IINUMA, T.A., and NAGAI, T., Image Restoration in Radio-isotope Imaging Systems, Phys. Med. Biol., Vol. 12, 1967, p. 501 - 509.
- 23 - IINUMA, T.A., NAGAI, T., and FUKUDA, N., Digital data processing and display in radioisotope imaging, In Medical Radioisotope Scintigraphy, IAEA, Vienna, 1969, p. 715-729.
- 24 - KRACKOW, K.A., DUNCAN, M.L., and GORTEN, R.J., Use of Digital Phantoms and a Simulation of the Scanning Process to Evaluate Techniques of Computer Focusing of Area Scans, Int. J. of Nucl. Med. and Biol., Vol.1, 1973, p. 29-35.
- 25 - LAMBERT, J.P., Etude par simulation des lissages polynômiaux des scintigraphies numériques avec contrôle statistique, Thèse de 3ème cycle, Université de Nancy I, 1975.
- 26 - LAURENT, P.J., Approximation et optimisation, Hermann, Paris, 1972.
- 27 - LEGRAS, B., POTDEVIN, M., et MARTIN, J., Intérêt de la simulation pour l'étude des méthodes de traitement des scintigrammes sur ordinateurs, Rev. Inf. Med., Vol. 3, 1972, p. 119-122.
- 28 - LEGRAS, B., POTDEVIN, M., et MARTIN, J., Statistical Verification of the smoothing of low scanning values. A study by simulation and with a phantom, J. Nucl. Med., Vol. 13, 1972, p. 528-533.
- 29 - LEGRAS, B., Analyse de différents modes de représentation des scintigraphies traitées par ordinateur (cartographie numérique), Mémoire pour l'obtention du diplôme d'études et de recherche en biologie humaine, mathématiques et statistiques (Mention Informatique médicale). Université de Nancy I, 1975.

- 30 - LEGRAS, J., Méthodes et techniques de l'analyse numérique, Dunod, Paris, 1971.
- 31 - LEGRAS, J., CHAU, N., et LEGRAS, B., Une nouvelle technique de correction de collimation des scintigraphies numériques. Etude par simulation, Ann. Phys. Biol. Med., Vol. 8, 1974, p. 221 - 236.
- 32 - LUENBERGER, D.G., Optimisation by vector space methods, Wiley, New-York, 1969.
- 33 - MAC INTYRE, W.J., Experimental Derivation of PSF from LS Recordings, J. of Nucl. Med., Vol. 12, 1970, p. 379.
- 34 - MALLET, J.L., Présentation d'un ensemble de méthodes et techniques de la cartographie automatique numérique, Sciences de la Terre, Série Mémoire, Université de Nancy, 1974.
- 35 - MARQUIS, C., Mise au point de la transformée de Fourier rapide et application, Thèse 3ème cycle, Université de Nancy I, 1970.
- 36 - MARTIN, J., LEGRAS, B., et PORTMANN, M.C., Lissage par ordinateur des Scintigraphies Numériques, Int. J. of Nucl. Med. and Biol., Vol. 1, 1973, p. 45-49.
- 37 - METZ, C.E., and BECK, R.N., Quantitative effects of stationary linear image processing on noise and resolution of structure in radionuclide images, J. of Nucl. Med., Vol. 15, 1973, p. 164-170.
- 38 - METZ, C.E., On the differentiel method of image focusing, J. of Nucl. Med., Vol. 11, 1970, p. 142-143.
- 39 - NAGAI, T., FUKUDA, N., and IINUMA, T.A., Computer-Focusing using an appropriate gaussian function, J. of Nucl. Med., Vol. 10, 1969, p. 209-212.

- 40 - NAGAI, T., IINUMA, T.A., and KODA, S., Computer focusing for area scans, J. of Nucl. Med., Vol. 9, 1968, p. 507-516.
- 41 - PELLETIER, P., Techniques numériques appliquées au calcul scientifique, Masson, Paris, 1971.
- 42 - QUITTNER, G., Nucl. Instrum. Meth. 39, 271, 1966.
- 43 - SCHWARTZ, L., Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Hermann, Paris, 1965.
- 44 - SCHWARTZ, L., Cours d'analyse, tome 1, Hermann, Paris, 1967.
- 45 - SPRAU, A.C., TAYLOR, W.N., and CHAPPEL, D.W., A computerized radioisotope scan data filter based on a system response to a point source, Mayo Clin. Proc. 41, 1966, p. 585-598.
- 46 - THEILHEIMER, F., A matrix version of the Fast Fourier Transform, IEEE Transactions on audio and electro-acoustics, Vol. 1969, p. 158-161.
- 47 - TODD - POKROPEK, A.E., Theoretical considerations when using various computer enhancing methods for the radioisotope scan, Colloque sur l'utilisation des ordinateurs en radiologie, Bruxelles, 1969.
- 48 - VETTER, H.G., Restoration of Biological Images using Limited Sampling, Phys. Med. Biol., Vol. 14, 1969, p. 417-430.
- 49 - WIENER, N., Extrapolation, Interpolation and smoothing of stationary time series, Wiley, New-York, 1949.
- 50 - WILENSKY, S., ASHARE, A.B., PIZER, S.M., HOOP, B., and BROWNELL, G.L., Medical Radioisotope Scintigraphy, I.A.E.A., Salzburg, 1969, p. 815.
- 51 - YUTAKA, O., The Application of the Modulation Transfer Function to Reduce Unsharpness in Scintigrams, Int. J. of Appl. Rad. and Isot., Vol. 22, 1971, p. 49-52.

NOM DE L'ETUDIANT : CHAU Nearkasen

NATURE DE LA THESE : DOCTORAT ES SCIENCES - THESE D'ETAT

VU, APPROUVE

& PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le 21/1/1976

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I

